

Méthodes stationnaires pour des potentiels à longue portée à symétrie sphérique

THESE

présentée à la Faculté des sciences
de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de docteur ès sciences physiques

par

Vladimir GEORGESCU

de

BUCAREST (Roumanie)

THESE No 1637

GENEVE

Imprimerie de la Section de Physique

1974

1973



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545931_0001

Méthodes stationnaires pour des potentiels à longue portée à symétrie sphérique

THESE

présentée à la Faculté des sciences
de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de docteur ès sciences physiques

par

Vladimir GEORGESCU

de

BUCAREST (Roumanie)

THESE No 1637

GENEVE

Imprimerie de la Section de Physique

1974

*La faculté des sciences, sur le préavis du professeur
J.M. JAUCH, directeur de thèse et d'une Commission
composée de Messieurs W. FARIS (Institut Battelle) et
W. AMREIN (Faculté des sciences) autorise l'impression
de la présente thèse, sans exprimer d'opinion sur les
propositions qui y sont énoncées.*

Genève, le 28 décembre 1973

*Le Doyen:
Jean MULLER*

Thèse No 1637



I N T R O D U C T I O N

Soient $\overset{\circ}{H}$ la fermeture dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ de la restriction à $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ de l'opérateur $-\frac{\Delta}{2m}$ et V un potentiel central du type $V = V_S + V_L$, V_S (resp. V_L) étant une partie à courte (resp. longue) portée; on note H un opérateur autoadjoint défini par l'expression formelle $\overset{\circ}{H} + V$. Le but de ce travail est :

1) Définir (par une méthode stationnaire) des opérateurs d'onde $\Omega_\pm$ qui entrelacent H et $\overset{\circ}{H}$.

2) Montrer qu'il existe des opérateurs $K_\pm$ (qui sont en quelque sorte "minimaux") tels que

$$\Omega_\pm f = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{iHt} K_\pm e^{-i\overset{\circ}{H}t} f$$

pour un ensemble dense de fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

3) Montrer (pour une classe plus restreinte de V_L) qu'il existe des opérateurs unitaires T_t fonctions de $\overset{\circ}{H}$ tels que

$$\Omega_\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{iHt} T_t$$

Ce dernier résultat établit le lien entre la méthode stationnaire et la théorie algébrique de la diffusion.

Les conditions exactes sous lesquelles ces propriétés ont été démontrées ainsi qu'une présentation détaillée des résultats sont faites dans le chapitre 3 qui peut être lu indépendamment du reste; nous n'entrerons donc pas dans les détails ici. Mentionnons encore comme résultat nouveau

le développement explicite en fonctions propres d'opérateurs différentiels ordinaires du type

$$\mathcal{T} = - \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + V_S + V_L$$

où $\ell > -\frac{1}{2}$, $V_S \in L^1$ et V_L est à variation bornée à l'infini (voir §4 pour une formulation exacte). Dans le cas $V_L(x) = \frac{a}{x}$ le résultat est connu (Kodaira (1)); pour un V_L à variation bornée quelconque, Weidmann (1) montre que le spectre des opérateurs autoadjoints engendrés par $\mathcal{T}$ n'a pas de composante singulièrement continue, mais il ne calcule pas la fonction spectrale; nous ne pouvons pas utiliser son résultat car il est essentiel pour la suite de ce travail de connaître la "normalisation des fonctions propres associées aux valeurs spectrales dans le continu" (en langage de physicien).

Dans la suite nous allons discuter les autres travaux qui ont poursuivi des buts similaires aux nôtres (seul le cas $V_L \neq 0$ nous intéresse) :

- a) Pour $V_L = \frac{a}{x}$ Dollard (1) définit les opérateurs $\Omega_{\pm}$ à l'aide d'évolutions libres modifiées T_t fonctions de $\hat{H}$ et montre les relations

$$(\Omega_{\pm} f)(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_{\pm}(\vec{x}, \vec{\kappa}) (Tf)(\vec{\kappa}) d^3\kappa$$

Ici $\psi_{+}(\cdot, \vec{\kappa})$ (resp. $\psi_{-}(\cdot, \vec{\kappa})$) est la solution de l'équation de Schrödinger stationnaire se comportant asymptotiquement comme la superposition d'une onde plane (distordue à cause du potentiel coulombien) et d'une onde sphérique (distordue) entrante (resp. sortante). On montre qu'elles sont des fonctions continues. Dans le cas général, nous ne pouvons définir $\psi_{\pm}(\cdot, \vec{\kappa})$ que comme série formelle.

- b) Utilisant les résultats précédents de Dollard, Mulherin - Zinnes (1) montrent l'existence des opérateurs $K_{\pm}$ dans le

cas $V(\vec{x}) = V_S(\vec{x}) + \frac{\alpha}{x}$, V_S étant un potentiel (non central) à courte portée (c'est dans leur article qu'apparaît pour la première fois ce type d'opérateurs). Leurs opérateurs $\mathcal{K}_{\pm}$ diffèrent des nôtres et nous pensons que l'on peut utiliser ceci pour montrer qu'ils sont non-bornés; cette question est restée ouverte dans leur travail.

- c) Toujours pour le potentiel coulombien $V_L(x) = \frac{\alpha}{x}$, Prugovecki - Zorbas (1) introduisent des opérateurs $\mathcal{K}(\Delta)$ "locaux", c'est-à-dire pour des régions finies Δ du spectre de $\hat{H}$. Ces opérateurs ont une structure complètement différente.
- d) Pour le cas des ondes S, i.e. $\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2}$ et $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_L(x)$ considérés comme des opérateurs dans $L^2(0, \infty)$, Matveev - Skriganov (1) définissent les opérateurs d'onde $\Omega_{\pm}$ à l'aide des déphasages et montrent la propriété 2). Ils utilisent la méthode WKB pour calculer le comportement asymptotique des fonctions propres, ce qui implique l'apparition d'un facteur supplémentaire dans la définition de $\mathcal{K}_{\pm}$; en particulier, même si V_L est à courte portée, $\mathcal{K}_{\pm}$ n'est pas l'identité. De plus la question de l'existence des évolutions T_t n'est pas abordée dans ce travail.
- e) L'existence d'évolutions modifiées T_t a été démontrée pour de larges classes de potentiels (voir Buslaev - Matveev (1) et Alsholm (1)) mais sans faire un lien avec les propriétés 1) et 2).

D'un autre point de vue, ce travail peut être considéré comme la généralisation aux potentiels à longue portée de l'article (1) de Green - Lanford (ce sont eux qui ont montré pour la première fois le lien entre les déphasages et les opérateurs d'onde). Mentionnons aussi le travail de

D. Marchesin - M.L. O'Carroll (1) qui suit la même méthode dans le cas $V_L = \frac{\alpha}{x}$. (Remarquons que ces auteurs utilisent le théorème sur le développement en fonctions propres pour $V_L = \frac{\alpha}{x}$ donné par Kodaira, et que la démonstration de ce théorème contient une erreur (voir J.S. Kac (1) pour l'explication).

COMMENTAIRES SUR L'ORGANISATION DU TRAVAIL ET JUSTIFICATION

DU CHOIX DU CADRE MATHEMATIQUE

Nous avons voulu poser le minimum de conditions sur la partie à longue portée V_L du potentiel. Les démonstrations des propositions 6 et 13 montrent alors la nécessité d'utiliser des équations dont les coefficients sont des mesures. Comme, d'autre part, le théorème de I.S. Kac (proposition 5) que nous utilisons pour calculer le développement en fonctions propres est également formulé dans ce cadre, nous avons admis que la partie à courte portée V_S du potentiel soit une mesure à variation bornée quelconque.

Les annexes 1 et 2 contiennent des définitions et certaines propriétés simples ~~des~~ expressions différentielles généralisées que nous utilisons dans la partie principale du travail. Ces annexes ne ~~contie~~nnent que des généralisations immédiates des résultats classiques. Nous avons donné plus de détails que nécessaire pour montrer les simplifications^{li} introduites par les propositions 2 et 9 de l'annexe 1. La première permet de rester entièrement dans le cadre des distributions (comparer avec l'approche de I.S. Kac (1); mais il faut remarquer aussi que l'approche de I.S. Kac est plus générale, la mesure de Lebesgue étant remplacée par une mesure quelconque). D'autre part, la proposition 9 simplifie beaucoup la théorie des opérateurs engendrés par une expression différentielle (voir par exemple les propositions 4 et 5 de l'annexe 2).

Tout ce qui suit la proposition 5 de l'annexe 2 a pour but la démonstration de la proposition 9 (annexe 2) qui règle la question du spectre discret. Nous avons à nouveau choisi une méthode plus compliquée que nécessaire pour pouvoir faire

le lien avec l'opérateur associé à la somme des formes de l'hamiltonien libre et du potentiel. Remarquons que nous ne pouvons pas utiliser directement cette définition pour H , à cause de la condition $f \in \mathcal{H}_0^1$ qui apparaît dans la proposition 7 (annexe 2); nous avons réellement besoin de la proposition 4 (paragraphe 2) qui montre l'identité des deux définitions, pour pouvoir appliquer la proposition 5 (paragraphe 2).

Implicitement, nous avons besoin d'une série de lemmes et de propositions (dans l'annexe 2 et les paragraphes 1 et 2) qui caractérisent d'une manière précise le domaine de H ; par exemple, nous n'avons pas trouvé dans la littérature la proposition 3 car, d'une façon générale, les conditions aux limites qui sont posées aux extrémités singulières ont une allure tout à fait différente (cf. par exemple Dunford - Schwartz (2), Kodaira (1), Naimark (1)).

Nous avons fait une démonstration complète de la proposition 1 à cause de l'importance de la solution régulière ϕ_λ et du fait que nous n'avons trouvé nulle part un énoncé si précis.

La proposition 6 (paragraphe 3) est essentielle pour le calcul de la mesure spectrale $\mathcal{P}$ (cf. proposition 5). C'est surtout le comportement de la fonction de Green de H au voisinage de l'axe réel qui nous intéressait.

Dans le chapitre 2, nous faisons toutes les estimations asymptotiques nécessaires pour obtenir les résultats du chapitre 3. Nous considérons la proposition 13 (paragraphe 6) (et son corollaire, le théorème 1 du chapitre 3) comme le point central de ce travail. Remarquons que dans sa démonstration, nous n'avons jamais utilisé la méthode de la phase stationnaire;

nous ne croyons pas qu'avec des conditions si faibles sur le potentiel, ce genre de méthodes aurait pu donner des résultats (comparer avec le travail de Matveev - Skriganov (1)). D'autre part, nous avons utilisé la méthode de la phase stationnaire (sous la forme du lemma 2 de l'annexe 3) dans le paragraphe 7, en suivant en cela Buslaev - Matveev (1); la proposition 14' montre le type de conditions supplémentaires qui doivent être posées sur V_L dans ce cas.

Remarquons que nous n'avons fait le lien avec la théorie algébrique que pour une classes assez particulière de V_L (surtout en ce qui concerne la décroissance à l'infini). En fait, nous croyons que la théorie algébrique (de Amrein - Martin - Misra) est capable de traiter la même classe de potentiels que ceux du théorème 1 du chapitre 3. D'autre part, nous considérons qu'une approche à la théorie de la diffusion dans l'esprit des "opérateurs d'habillage" $\mathcal{K}_{\pm}$ est plus générale que l'approche algébrique (sous la forme actuelle du moins) car elle permet par exemple de tenir compte d'une renormalisation d'amplitude (cf. les modèles de Lie; voir dans K. Hepp, "Théorie de la renormalisation", Chapitre III, la discussion faite entre le théorème 3.2 (page 50) et le théorème 3.4 (page 54); il suffit de considérer le cas $G < \infty$ selon la remarque précédant le théorème 3.4 (page 54).

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Professeur J.M. JAUCH pour avoir assumé la direction de cette thèse et pour sa constante bienveillance.

Je remercie également le Dr. W. AMREIN pour son intérêt constant et pour les nombreuses suggestions faites au cours de la rédaction de ce travail.

Je suis reconnaissant à Mme M. COHN qui a lu le manuscrit avec beaucoup d'attention dans le but de m'aider à améliorer sa forme.

Enfin, je remercie le Professeur W.G. FARIS d'avoir bien voulu faire partie du jury de thèse.

T A B L E D E S M A T I E R E S

<u>CHAPITRE 1</u> :	Propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger radial	1
§ 1	La solution régulière	1
§ 2	Définition de l'opérateur radial	15
§ 3	La solution de Jost	27
§ 4	Développement en fonctions propres de l'opérateur radial	47
<u>CHAPITRE 2</u> :	Evolutions libres modifiées et opérateurs d'onde	54
§ 5	Les opérateurs $K_{\pm}$	54
§ 6	Les opérateurs d'onde	76
§ 7	Modifications dépendantes du temps de l'évolution libre	92
<u>CHAPITRE 3</u> :	Applications en théorie de la diffusion	102
<u>ANNEXES</u> :	Annexe 1	111
	Annexe 2	129
	Annexe 3	154
	Annexe 4	169
<u>REFERENCES</u>		174

CHAPITRE I : PROPRIETES SPECTRALES DE L'OPERATEUR DE SCHRÖDINGER RADIAL

1. La solution régulière de l'équation radiale

Dans ce paragraphe, nous supposons que :

1) $l \in \mathbb{R}$ et $l > -\frac{1}{2}$

2) v est une mesure réelle sur $I = (0, \infty)$ telle que: $\int_{(0,1]} x |v|(dx) < \infty$

On note μ la mesure réelle sur I donnée par:

$$\mu(dx) = \frac{l(l+1)}{x^2} dx + v(dx)$$

Pour la démonstration de la proposition suivante, on suit la méthode classique (cf. Alfaro-Regge (1) Chapitre III).

Proposition 1.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ le système :

$$\begin{cases} -f^{(2)} + \mu f = \lambda f \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^{-(l+1)} f(x) = 1 \end{cases}$$

a une solution unique $\phi_\lambda : I \rightarrow \mathbb{C}$ (on note $\phi_\lambda(x) \equiv \phi(x, \lambda)$). Cette solution s'appelle la solution régulière (de l'équation de Schrödinger radiale $-f^{(2)} + \mu f = \lambda f$) et elle a de plus les

propriétés suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} x^{-(\ell+1)} \phi_\lambda(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\ell \phi_\lambda^+(x) = \ell+1$$

2) $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi_\lambda$ est une fonction réelle

3) $(x, \lambda) \mapsto \phi_\lambda(x)$ est continue sur $I \times \mathbb{C}$

4) Pour tout $x \in I$ les applications :

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \phi_\lambda(x) \quad ; \quad \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \phi_\lambda^+(x)$$

sont entières.

De plus, si χ_λ est une autre solution de $-f^{(2)} + \mu f = \lambda f$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\ell \chi_\lambda(x) = \frac{1}{2\ell+1} W(\chi_\lambda, \phi_\lambda)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\ell+1} \chi_\lambda^+(x) = -\frac{\ell}{2\ell+1} W(\chi_\lambda, \phi_\lambda)$$

Démonstration

a) Montrons d'abord que si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est telle que la fonction $x \mapsto x^{-(\ell+1)} f(x)$ est bornée au voisinage de 0 et de plus que $\forall x \in I$:

$$(*) \quad \psi(x) = x^{\ell+1} + \int_{0+0}^{x+0} \frac{x^{\ell+1} \lambda^\ell - \lambda^{\ell+1} x^{-\ell}}{2\ell+1} \psi(s) (\nu(ds) - \lambda ds)$$

(cette équation est écrite par analogie avec la proposition 8, Annexe 1), alors $-f^{(2)} + \mu f = \lambda f$ et f a les propriétés 1) de l'énoncé. En fait :

$$\begin{aligned}
 |x^{-(\ell+1)} f(x) - 1| &= \left| \int_{(0,x]} \frac{x^{-\ell} - x^{\ell+1} x^{-2\ell-1}}{2\ell+1} f(\lambda) (v(d\lambda) - \lambda d\lambda) \right| \leq \\
 &\leq \sup_{0 < \lambda \leq x} |x^{-(\ell+1)} f(\lambda)| \frac{1}{2\ell+1} \int_{(0,x]} \left(1 - \frac{x^{2\ell+1}}{\lambda^{2\ell+1}}\right) \lambda (|v|(d\lambda) + |\lambda| d\lambda) \leq \\
 &\leq \sup_{0 < \lambda \leq x} |x^{-(\ell+1)} f(\lambda)| \frac{1}{2\ell+1} \int_{(0,x]} \lambda (|v|(d\lambda) + |\lambda| d\lambda) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

pour $x \rightarrow 0$.

Si on pose :

$$g_1(x) = \frac{1}{2\ell+1} \int_{(0,x]} x^{-\ell} f(\lambda) (v(d\lambda) - \lambda d\lambda)$$

$$g_2(x) = \frac{1}{2\ell+1} \int_{(0,x]} x^{\ell+1} f(\lambda) (v(d\lambda) - \lambda d\lambda)$$

alors g_i sont des fonctions à variation finie et leurs dérivées au sens des distributions sont les mesures

$$g_1^{(1)}(dx) = \frac{1}{2\ell+1} x^{-\ell} f(x) (v(dx) - \lambda dx)$$

$$g_2^{(1)}(dx) = \frac{1}{2\ell+1} x^{\ell+1} f(x) (v(dx) - \lambda dx)$$

De plus :

$$f(x) = x^{\ell+1} + x^{\ell+1} g_1(x) - x^{\ell} g_2(x)$$

La proposition 3 (Annexe 1) et les formules précédentes donnent :

$$f^{(1)}(x) = (\ell+1) x^{\ell} + (\ell+1) x^{\ell} g_1(x) + \ell x^{-\ell-1} g_2(x)$$

Donc $f^{(1)}$ est une fonction, i.e. f est absolument continue et $f'(x) = (\ell+1)x^{\ell} + (\ell+1)x^{\ell} g_1(x) + \ell x^{-\ell-1} g_2(x)$ presque partout. Comme la fonction du membre de droite est continue à droite, il suit que $f^+(x)$ existe $\forall x \in I$ et pour tout $x \in I$:

$$f^+(x) = (l+1) x^l + (l+1) x^l g_1(x) + l x^{l-1} g_2(x)$$

Exactement comme plus haut nous aurons :

$$| x^l f^+(x) - (l+1) | \rightarrow 0 \quad \text{pour } x \rightarrow 0.$$

On applique la proposition 3 (Annexe 1) à f^+ et on obtient

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= \frac{l(l+1)}{x^2} [x^{l+1} + x^{l+1} g_1(x) - x^l g_2(x)] + f(x) [v(x) - \lambda] = \\ &= \frac{l(l+1)}{x^2} f(x) + (v(x) - \lambda) f(x) \end{aligned}$$

(avec les conventions de notation utilisées en théorie des distributions : $v \equiv v(x) \equiv v(dx)$; $f^{(2)} \equiv f^{(2)}(x)$)
donc $-f^{(2)} + \mu f = \lambda f$.

b) Montrons qu'il existe une fonction f ayant les propriétés du point a). On résoud (*) par approximations successives :

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^{l+1} \\ f_{n+1}(x) &= \int_{0+0}^{x+0} \frac{x^{l+1} s^{-l} - s^{l+1} x^{-l}}{2l+1} f_n(s) (v(ds) - \lambda ds) \end{aligned}$$

(nous allons voir, par récurrence, que les intégrales existent). On pose :

$$B(x) \equiv B(x, \lambda) = \frac{1}{2l+1} \int_{0+0}^{x+0} s (|v|(ds) + |\lambda| ds)$$

Donc $B : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ est une fonction croissante, continue à gauche, dont la dérivée au sens des distributions est la

mesure

$$B^{(1)}(dx) = (2\ell+1)^{-1} x (|v_1(dx)| + |x_1| dx)$$

Montrons par récurrence que f_n est continue et que pour tout $x \in I$:

$$|x^{-(\ell+1)} f_n(x)| \leq \frac{B(x)^n}{n!}$$

Pour $n = 0$ c'est évident; si c'est juste pour n , alors l'intégrale qui définit $f_{n+1}(x)$ converge absolument et l'intégrand s'annule pour $s = x$, on peut donc changer la limite d'intégration de $x + 0$ en $x - 0$, ce qui montre la continuité de f_{n+1} .

De plus :

$$\begin{aligned} |x^{-(\ell+1)} f_{n+1}(x)| &= \left| \int_{x-0}^{x+0} \frac{1 - \lambda^{2\ell+1} x^{-2\ell-1}}{2\ell+1} \lambda^{-(\ell+1)} f_n(s) \lambda (v(ds) + \lambda ds) \right| \\ &\leq \int_{x-0}^{x+0} \frac{B(s)^n}{n!} \frac{\lambda (|v_1(ds)| + |x_1| ds)}{2\ell+1} = \frac{1}{n!} \int_{x-0}^{x+0} B(s)^n B^{(1)}(ds) \leq \frac{B(x)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

(pour la dernière inégalité, cf. corollaire de la proposition 4, Annexe 1).

Il suit que la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge absolument et uniformément sur $(0, X)$, $\forall X < \infty$ et :

$$|x^{-(\ell+1)} f(x)| \leq \exp(B(x)) \leq \exp(B(x)) \quad \text{si } 0 < x \in X$$

Le théorème de Lebesgue montre que f est solution de (*).

c) On note ϕ_λ la solution f déjà trouvée et ϕ_{λ_n} les approximations successives. Alors $\lambda \mapsto \phi_{\lambda_n}(x)$ sont des polynômes et la série qui définit $\phi_\lambda(x)$ converge absolument et uniformément en λ lorsque λ parcourt un compact dans $\mathbb{C}$ (B étant une fonction localement bornée de x). Les théorèmes 9.12.1 et 9.9.6 de Dieudonné (1) montrent que $\lambda \mapsto \phi_\lambda(x)$ est entière. La continuité de $(x, \lambda) \mapsto \phi_\lambda(x)$ est évidente. D'autre part, il est clair

que

$$\phi_{\lambda n}^+(x) = \int_{0+0}^{x+0} \frac{(2\ell+1) x^\ell \lambda^{-\ell} + \ell \lambda^{\ell+1} x^{-(\ell+1)}}{2\ell+1} \phi_{\lambda n-1}(\lambda) (v(d\lambda) - \lambda d\lambda)$$

(cf. calcul de $f^+(x)$ au point a)). Comme plus haut on obtient la majoration :

$$|x^{-\ell} \phi_{\lambda n}^+(x)| \leq (2\ell+1) \frac{B(x+0)^n}{n!} \quad \forall n \geq 0, \quad \forall x \in I, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_{\lambda n}^+(x)$ converge uniformément et absolument quand $x \in (0, X)$ et $\lambda \in$ compact dans $\mathbb{C}$ (pour tout $X > 0$ et tout compact). En particulier nous aurons $\phi_{\lambda}^+(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{\lambda n}^+(x)$ donc $\lambda \mapsto \phi_{\lambda}^+(x)$ est entière.

d) Montrons la dernière affirmation de l'énoncé (cf. I.S. Kac (1) lemme 4). Si $W(\chi_{\lambda}, \phi_{\lambda}) = 0$ c'est évident, car χ_{λ} sera proportionnelle à ϕ_{λ} et $x^{\ell} \phi_{\lambda}(x) = x^{2\ell+1} \cdot x^{-(\ell+1)} \phi_{\lambda}(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow 0$ ($2\ell+1 > 0$); de même pour $x^{\ell+1} \phi_{\lambda}^+(x)$. Si $W(\chi_{\lambda}, \phi_{\lambda}) \neq 0$, on peut supposer $W(\chi_{\lambda}, \phi_{\lambda}) = 1$. Comme $x^{-(\ell+1)} \phi_{\lambda}(x) \rightarrow 1$ et $x^{-\ell} \phi_{\lambda}^+(x) \rightarrow \ell+1 \neq 0$, $\exists x > 0$ t.q. $0 < x \in X \Rightarrow \phi_{\lambda}(x) > 0$ et $\phi_{\lambda}^+(x) > 0$ (nous n'écrirons plus l'indice λ dans la suite). Alors $\forall x \in (0, X]$:

$$\begin{aligned} (\chi \phi^{-1})^+(x) &= (\chi^+(x) \phi(x) - \chi(x) \phi^+(x)) \phi^{-2}(x) = -W(\chi, \phi) \phi^{-2}(x) = \\ &= -\phi^{-2}(x). \end{aligned}$$

χ et ϕ sont absolument continues, on peut donc intégrer :

$$\chi(x) = \frac{\chi(x)}{\phi(x)} \phi(x) + \phi(x) \int_x^x \frac{d\lambda}{\phi^2(\lambda)} \quad ; \quad x \in (0, X)$$

Puisque la fonction à intégrer est continue :

$$\chi^+(x) = \frac{\chi(x)}{\phi(x)} \phi^+(x) + \phi^+(x) \int_x^x \frac{d\lambda}{\phi^2(\lambda)} = \frac{1}{\phi(x)}$$

En supposant que les limites des membres de gauche existent, il est clair que nous aurons

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^e \chi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^e \phi(x) \int_x^x \frac{d\lambda}{\phi^2(\lambda)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{e+1} \chi^+(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{e+1} \phi^+(x) \int_x^x \frac{d\lambda}{\phi^2(\lambda)} - 1$$

Les relations :

$$x^e \phi(x) \int_x^x \phi^{-2}(\lambda) d\lambda = x^{-(e+1)} \phi(x) \cdot x^{2e+1} \int_x^x \phi^{-2}(\lambda) d\lambda$$

$$x^{e+1} \phi^+(x) \int_x^x \phi^{-2}(\lambda) d\lambda = x^{-e} \phi^+(x) \cdot x^{2e+1} \int_x^x \phi^{-2}(\lambda) d\lambda$$

montrent qu'il suffit de vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2e+1} \int_x^x \phi^{-2}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2e+1}$

(ceci est une conséquence de Dieudonné (2) ch. III théorème 10.2; mais nous le montrerons directement). Pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \gamma \in (0, x)$ t.g. $x \leq \gamma \Rightarrow |x^{2(e+1)} \phi^{-2}(x) - 1| < \varepsilon$ (car $x^{e+1} \phi^{-1}(x) \rightarrow 1$), donc : $|\phi^{-2}(x) - x^{-2e-2}| < \varepsilon x^{-2e-2}$. Donc si $0 < x < \gamma < x$:

$$\begin{aligned} & \left| x^{2e+1} \int_x^x \phi^{-2}(\lambda) d\lambda - \frac{1}{2e+1} \right| = \left| x^{2e+1} \int_x^x \phi^{-2}(\lambda) d\lambda + x^{2e+1} \int_x^y \phi^{-2}(\lambda) d\lambda - \right. \\ & \quad \left. - x^{2e+1} \int_x^y \lambda^{-2e-2} d\lambda + x^{2e+1} \int_x^y \lambda^{-2e-2} d\lambda - \frac{1}{2e+1} \right| \leq x^{2e+1} \cdot \text{const} + \\ & \quad + x^{2e+1} \varepsilon \int_x^y \lambda^{-2e-2} d\lambda + \left| x^{2e+1} \int_x^y \lambda^{-2e-2} d\lambda - \frac{1}{2e+1} \right| = \\ & \quad = x^{2e+1} \cdot \text{const} - \varepsilon x^{2e+1} (2e+1)^{-1} \gamma^{-2e-1} + \varepsilon (2e+1)^{-1} + x^{2e+1} (2e+1)^{-1} \gamma^{-2e-1} \\ & \text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \sup \left| x^{2e+1} \int_x^x \phi^{-2}(\lambda) d\lambda - (2e+1)^{-1} \right| \leq \varepsilon (2e+1)^{-1} \\ & \text{et } \varepsilon > 0 \text{ quelconque.} \end{aligned}$$

e) Montrons l'unicité de la solution. Soient ϕ la solution trouvée et χ une solution de $-f^{(2)} + \mu f = \lambda f$ t.g. $\mathcal{W}(\chi, \phi) = 1$. Si ψ est une solution de la même équation telle que : $x^{-(e+1)} \psi(x) \rightarrow 1$, alors $\psi = c_1 \phi + c_2 \chi$ avec $c_i \in \mathbb{C}$

qui sont des constantes. Comme $x^{\ell} \psi(x) \rightarrow 0$ et
 $x^{\ell} (c_1 \phi(x) + c_2 x(x)) \rightarrow (2\ell+1)^{-1} c_2$ nous aurons
 $c_2 = 0$, d'où suit aussi $c_1 = 1$, i.e. $\psi = \phi$.

Q.E.D.

Nous aurons besoin plus tard de l'estimation suivante, plus précise :

Lemme 1 :

Soit ϕ_i la solution régulière de $-f^{(2)} + \mu f = i f$ (où i est l'unité imaginaire; $\text{Re} \phi_i$, $\text{Im} \phi_i$ dénotent la partie réelle, respectivement imaginaire de ϕ_i). Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-(\ell+1)} \text{Re} \phi_i(x) = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{-(\ell+3)} \text{Im} \phi_i(x) = -\frac{1}{2(2\ell+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\ell} \text{Re} \phi_i^+(x) = \ell+1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{-(\ell+2)} \text{Im} \phi_i^+(x) = -\frac{\ell+3}{2(2\ell+3)}$$

Remarque : dans la proposition 1 la condition qui demandait que v soit réelle (et $\ell \in \mathbb{R}$) n'avait pas d'importance; ici ce fait est essentiel.

Démonstration

La proposition 1 donne $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-(\ell+1)} \text{Re} \phi_i(x) = \text{Re} \left(\lim_{x \rightarrow 0} x^{-(\ell+1)} \phi_i(x) \right) = 1$ et de manière analogue pour $\text{Re} \phi_i^+$. Il nous reste à montrer que les parties imaginaires s'annulent "beaucoup plus vite".

Soient ϕ_0, χ_0 deux solutions réelles de $-f^{(2)} + \mu f = 0$, ϕ_0 étant la solution régulière et χ_0 étant telle que $W(\chi_0, \phi_0) = 1$. Par analogie avec la proposition 8 annexe 1, nous considérons la fonction :

$$\psi(x) = \int_0^x (\chi_0(x) \phi_0(y) - \chi_0(y) \phi_0(x)) i \phi_i(y) dy$$

(l'intégrale converge absolument car $\chi_0(\lambda) \phi_i(\lambda) \sim \frac{\lambda^{-2}}{2\varrho+1} \lambda^{\varrho+1} = \frac{\lambda}{2\varrho+1}$).
Il est clair que :

$$\psi^+(x) = \int_0^x (\chi_0^+(x) \phi_0(\lambda) - \chi_0(\lambda) \phi_0^+(x)) i \phi_i(\lambda) d\lambda$$

existe $\forall x \in I$ et que c'est une fonction à variation finie.

D'après la proposition 3 (annexe 1), la mesure engendrée par ψ^+ est :

$$\begin{aligned} \psi^{(2)}(dx) &= \chi_0^{(2)}(dx) \int_0^x \phi_0(\lambda) i \phi_i(\lambda) d\lambda + \chi_0^+(x) \phi_0(x) i \phi_i(x) dx \\ &\quad - \phi_0^{(2)}(dx) \int_0^x \chi_0(\lambda) i \phi_i(\lambda) d\lambda - \phi_0^+(x) \chi_0(x) i \phi_i(x) dx = \\ &= \mu(dx) \chi_0(x) \int_0^x \phi_0(\lambda) i \phi_i(\lambda) d\lambda - \mu(dx) \phi_0(x) \int_0^x \chi_0(\lambda) i \phi_i(\lambda) d\lambda - \\ &\quad - (\chi_0(x) \phi_0^+(x) - \chi_0^+(x) \phi_0(x)) i \phi_i(x) dx = \\ &= \mu(dx) \psi(x) - W(\chi_0, \phi_0) i \phi_i(x) dx = \psi(x) \mu(dx) - i \phi_i(x) dx \end{aligned}$$

c'est-à-dire ψ est solution de l'équation : $-\psi^{(2)} + \mu\psi = i \phi_i$.

D'autre part $-\phi_i^{(2)} + \mu\phi_i = i\phi_i$ donc si $\psi_0 = \phi_i - \psi$ nous aurons $-\psi_0^{(2)} + \mu\psi_0 = 0$. De plus :

$$\begin{aligned} x^{-(\varrho+1)} \psi(x) &= i x^{\varrho} \chi_0(x) \cdot x^{-2\varrho-1} \int_0^x \phi_0(\lambda) \phi_i(\lambda) d\lambda - \\ &\quad - i x^{-(\varrho+1)} \phi_0(x) \int_0^x \chi_0(\lambda) \phi_i(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

D'après la proposition 1 : $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\varrho} \chi_0(x) = \frac{1}{2\varrho+1}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-(\varrho+1)} \phi_0(x) = 1$. De plus :

$$\begin{aligned} x^{-2\varrho-1} \int_0^x \phi_0(\lambda) \phi_i(\lambda) d\lambda &= x^{-2\varrho-1} \int_0^x (\phi_0(\lambda) \phi_i(\lambda) - \lambda^{2\varrho+2}) d\lambda + \\ &\quad + x^{-2\varrho-1} \int_0^x \lambda^{2\varrho+2} d\lambda \end{aligned}$$

Comme $\lambda^{-2\varrho-2} \phi_0(\lambda) \phi_i(\lambda) \rightarrow 1$, pour tout $\varepsilon > 0$ si x est suffisamment petit : $0 < \lambda \leq x \Rightarrow |\phi_0(\lambda) \phi_i(\lambda) - \lambda^{2\varrho+2}| \leq \varepsilon \lambda^{2\varrho+2}$;

donc le premier terme de l'expression précédente est majoré par

$$x^{-2\varrho-1} \varepsilon \int_0^x \lambda^{2\varrho+2} d\lambda = x^{-2\varrho-1} \varepsilon \frac{x^{2\varrho+3}}{2\varrho+3} = \frac{\varepsilon}{2\varrho+3} x^2$$

et converge donc vers 0 pour $x \rightarrow 0$; de même pour le deuxième terme, c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2e-1} \int_0^x \phi_0(\lambda) \phi_i(\lambda) d\lambda = 0$$

De la même manière :

$$\begin{aligned} \int_0^x \chi_0(\lambda) \phi_i(\lambda) d\lambda &= \int_0^x \left(\chi_0(\lambda) \phi_i(\lambda) - \frac{\lambda^{-e}}{2e+1} \cdot \lambda^{e+1} \right) d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2e+1} \int_0^x \lambda^{e+1} d\lambda \longrightarrow 0 \quad \text{pour } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Il suit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-(e+1)} \psi(x) = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi_0(x) x^{-(e+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-(e+1)} \phi_i(x) - \lim_{x \rightarrow 0} x^{-(e+1)} \psi(x) = 1$$

L'unicité de la solution régulière implique $\psi_0 = \phi_0$, ce qui donne $\phi_i = \psi_0 + \psi = \phi_0 + \psi$, donc $\forall x \in \mathbb{I}$:

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= \phi_0(x) + \int_0^x (\chi_0(\lambda) \phi_0(\lambda) - \chi_0(\lambda) \phi_0(x)) i \phi_i(\lambda) d\lambda \\ \phi_i^+(x) &= \phi_0^+(x) + \int_0^x (\chi_0^+(\lambda) \phi_0(\lambda) - \chi_0(\lambda) \phi_0^+(x)) i \phi_i(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

ϕ_0 et χ_0 étant réelles :

$$\begin{aligned} \Im \phi_i(x) &= \int_0^x (\chi_0(\lambda) \phi_0(\lambda) - \chi_0(\lambda) \phi_0(x)) \operatorname{Re} \phi_i(\lambda) d\lambda \\ \Im \phi_i^+(x) &= \int_0^x (\chi_0^+(\lambda) \phi_0(\lambda) - \chi_0(\lambda) \phi_0^+(x)) \operatorname{Re} \phi_i(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

Nous calculons séparément le comportement de chaque terme :

$$\begin{aligned} x^{-(e+3)} \int_0^x \chi_0(\lambda) \phi_0(\lambda) \operatorname{Re} \phi_i(\lambda) d\lambda &= x^e \chi_0(x) \cdot x^{-2e-3} \int_0^x \phi_0(\lambda) \operatorname{Re} \phi_i(\lambda) d\lambda \\ &= x^e \chi_0(x) \cdot x^{-2e-3} \int_0^x (\phi_0(\lambda) \operatorname{Re} \phi_i(\lambda) - \lambda^{2e+2}) d\lambda + x^e \chi_0(x) x^{-2e-3} \int_0^x \lambda^{2e+2} d\lambda \end{aligned}$$

Comme plus haut, on voit que le premier terme tend vers zéro pour $x \rightarrow 0$ (car $\varepsilon > 0$ est quelconque); la limite du deuxième terme est :

$$\frac{1}{2\varepsilon+1} - \frac{1}{2\varepsilon+3}$$

Le comportement du deuxième terme de $\text{Im } \phi_i(x)$ est le suivant :

$$\begin{aligned} -x^{-(\varepsilon+3)} \int_0^x \chi_0(\lambda) \phi_0(x) R_\varepsilon \phi_i(\lambda) d\lambda &= -x^{-(\varepsilon+1)} \phi_0(x) x^{-2} \int_0^x (\chi_0(\lambda) R_\varepsilon \phi_i(\lambda) \\ &- \frac{\lambda^{-\varepsilon}}{2\varepsilon+1} \cdot \lambda^{\varepsilon+1}) d\lambda = -x^{-(\varepsilon+1)} \phi_0(x) \cdot x^{-2} \int_0^x \frac{\lambda}{2\varepsilon+1} d\lambda \end{aligned}$$

La première partie converge vers 0 (même raisonnement avec un $\varepsilon > 0$ quelconque), la deuxième vers $-1 \cdot \frac{1}{2(2\varepsilon+1)}$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-(\varepsilon+3)} \gamma_{\text{Im}} \phi_i(x) = \frac{1}{(2\varepsilon+1)(2\varepsilon+3)} - \frac{1}{2(2\varepsilon+1)} = -\frac{1}{2(2\varepsilon+3)}$$

Le calcul pour $\text{Im } \phi_i^+(x)$ est identique et nous obtenons :

$$\begin{aligned} x^{-(\varepsilon+2)} \gamma_{\text{Im}} \phi_i^+(x) &= x^{\varepsilon+1} \chi_0^+(x) \cdot x^{-(2\varepsilon+3)} \int_0^x \phi_0(\lambda) R_\varepsilon \phi_i(\lambda) d\lambda - \\ &- x^{-\varepsilon} \phi_0^+(x) \cdot x^{-2} \int_0^x \chi_0(\lambda) R_\varepsilon \phi_i(\lambda) d\lambda \sim -\frac{\varepsilon}{2\varepsilon+1} \cdot \frac{1}{2\varepsilon+3} - \\ &- (\varepsilon+1) \cdot \frac{1}{2(2\varepsilon+1)} = -\frac{2\varepsilon^2 + 7\varepsilon + 3}{2(2\varepsilon+1)(2\varepsilon+3)} = -\frac{\varepsilon+3}{2(2\varepsilon+3)} \end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemme 2

Si $\varepsilon \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pour toute solution χ_i de l'équation $-f(2) + \mu f = if$, nous avons alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\gamma_{\text{Im}} \chi_i(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \gamma_{\text{Im}} \chi_i^+(x) = 0$$

Démonstration :

Si $W(x_i, \phi_i) = 0$, x_i est alors proportionnelle à ϕ_i et les affirmations sont évidentes. Il suffit donc de considérer $W(x_i, \phi_i) = 1$; comme dans la démonstration de la proposition 1 (on omettra les indices i dans la suite) si x est suffisamment petit, on a pour tout $x \in (0, X)$:

et

$$\chi(x) = \frac{\chi(x)}{\phi(x)} \phi(x) + \phi(x) \int_x^X \frac{d\lambda}{\phi^2(\lambda)}$$

$$\chi^+(x) = \frac{\chi(x)}{\phi(x)} \phi^+(x) + \phi^+(x) \int_x^X \frac{d\lambda}{\phi^2(\lambda)} - \frac{1}{\phi(x)}$$

Comme ϕ et ϕ^+ ont le comportement voulu pour $x \rightarrow 0$, on peut négliger les premiers termes des expressions précédentes. Il nous reste donc à estimer :

$$g(x) = \operatorname{Re} \phi(x) \cdot \int_x^X \gamma_{\text{im}} \phi^{-2}(\lambda) d\lambda + \gamma_{\text{im}} \phi(x) \cdot \int_x^X \operatorname{Re} \phi^{-2}(\lambda) d\lambda$$

$$g^+(x) = \operatorname{Re} \phi^+(x) \int_x^X \gamma_{\text{im}} \phi^{-2}(\lambda) d\lambda + \gamma_{\text{im}} \phi^+(x) \int_x^X \operatorname{Re} \phi^{-2}(\lambda) d\lambda - \gamma_{\text{im}} \phi^+(x)$$

La relation : $(a + ib)^{-1} = (a - ib) (a^2 + b^2)^{-1}$ donne :

$$\gamma_{\text{im}} \phi^{-1}(x) = -\gamma_{\text{im}} \phi(x) \cdot |\phi(x)|^{-2}$$

La proposition 1 et le lemme 1 impliquent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\ell+1} \gamma_{\text{im}} \phi^{-1}(x) = - \lim_{x \rightarrow 0} [x^{-(2\ell+3)} \gamma_{\text{im}} \phi(x)] \cdot [x^{2\ell+2} |\phi(x)|^{-2}] = \frac{1}{2(2\ell+3)}$$

D'autre part :

$$(a + ib)^{-2} = (a^2 - b^2 - 2iab) (a^2 + b^2)^{-2}$$

i.e. : $\operatorname{Re} \phi^{-2}(\lambda) = \left[(\operatorname{Re} \phi(\lambda))^2 - (\gamma_{\text{im}} \phi(\lambda))^2 \right] |\phi(\lambda)|^{-4}$

d'où :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{2(\varrho+1)} \operatorname{Re} \phi^{-2}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\lambda^{2(\varrho+1)} (\operatorname{Re} \phi(\lambda))^2 - \lambda^{-2(\varrho+1)} (\operatorname{Im} \phi(\lambda))^2 \right] \lambda^{4(\varrho+1)} |\phi(\lambda)|^{-4} = 1$$

et :

$$\operatorname{Im} \phi^{-2}(\lambda) = -2 \operatorname{Re} \phi(\lambda) \cdot \operatorname{Im} \phi(\lambda) \cdot |\phi(\lambda)|^{-4}$$

d'où :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{2\varrho} \operatorname{Im} \phi^{-2}(\lambda) = -2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-(\varrho+1)} \operatorname{Re} \phi(\lambda) \cdot \lambda^{-(\varrho+3)} \operatorname{Im} \phi(\lambda) \cdot \lambda^{4(\varrho+1)} |\phi(\lambda)|^{-4} = \frac{1}{2\varrho+3}$$

Comme dans la démonstration de la proposition 1, il vient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\varrho+1} \int_x^X \operatorname{Re} \phi^{-2}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\varrho+1}$$

Maintenant nous utiliserons le fait que $\ell < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_x^X |\operatorname{Im} \phi^{-2}(\lambda)| d\lambda &= \int_x^X \lambda^{2\varrho} |\operatorname{Im} \phi^{-2}(\lambda)| \cdot \lambda^{-2\varrho} d\lambda \leq \text{const.} \int_x^X \lambda^{-2\varrho} d\lambda \leq \\ &\leq \text{const.} \int_0^X \lambda^{-2\varrho} d\lambda < \infty \quad \text{si } \ell < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^X \operatorname{Im} \phi^{-2}(\lambda) d\lambda$ existe et est finie.

Si on utilise toutes ces relations on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} \phi(x)}{\sqrt{x}} \int_0^X \operatorname{Im} \phi^{-2}(\lambda) d\lambda + \\ &+ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im} \phi(x)}{x^{\varrho+3}} \cdot x^{2\varrho+1} \int_x^X \operatorname{Re} \phi^{-2}(\lambda) d\lambda \cdot x^{-\varrho+2-\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned}$$

car : $-\varrho+2-\frac{1}{2} > 1 \quad \text{si } \ell < \frac{1}{2}$

Aussi :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} g^+(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \operatorname{Re} \phi^+(x) \cdot \int_0^x \gamma_{\mu} \phi^{-2}(s) ds + \\ &+ \lim_{x \rightarrow 0} x^{-(\varrho+2)} \gamma_{\mu} \phi^+(x) \cdot x^{2\varrho+1} \int_x^x \operatorname{Re} \phi^{-2}(s) ds \cdot x^{-\varrho+1+\frac{1}{2}} - \\ &- \lim_{x \rightarrow 0} x^{\varrho-1} \gamma_{\mu} \phi^{-1}(x) \cdot x^{-\varrho+1+\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{si } \varrho < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Remarques :

- 1) Dans la démonstration du lemme 2 on peut utiliser la même méthode que pour le lemme 1.
- 2) Une autre méthode pour la démonstration du lemme 1 est la suivante : on montre d'abord que $x \mapsto x^{-(\varrho+3)} \gamma_{\mu} \phi_i(x)$ est bornée (en estimant $x^{-(\varrho+3)} \gamma_{\mu} \phi_{\lambda n}(x)$ pour chaque n) et puis on répète le raisonnement du début de la proposition 1.

2. Définition de l'opérateur radial

Nous gardons les mêmes hypothèses sur ℓ et v que dans le paragraphe 1 et nous notons τ l'expression différentielle associée à la mesure μ , T (respectivement T^*) l'opérateur minimal (respectivement maximal) engendré par τ dans $L^2(I)$ ($I = (0, \infty)$; cf. Annexe 2).

Il y a une conséquence immédiate à la proposition 1 :

Proposition 2

- 1) Si $\ell \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ alors 0 est dans le cas du cercle limite;
- 2) Si $\ell \geq \frac{1}{2}$ alors 0 est dans le cas du point limite.

Lemme 3

Si $f \in D(T)$ et $X < \infty$, alors $\exists c < \infty$ t.p. $\forall x \in (0, X)$:

I) si $\ell \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ alors :

$$|f(x)| \leq c x^{\ell+1} ; |f^+(x)| \leq c x^{\ell}$$

II) si $\ell = \frac{1}{2}$ alors :

$$|f(x)| \leq c x^{3/2} (|\ln x| + 1) ; |f^+(x)| \leq c x^{1/2} (|\ln x| + 1)$$

III) si $\ell > \frac{1}{2}$ alors :

$$|f(x)| \leq c x^{3/2} ; |f^+(x)| \leq c x^{1/2}$$

En particulier :

$$f \in D(T) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} f^+(x) = 0$$

Démonstration

a) Montrons d'abord qu'il existe $f_0 \in D(T^*)$ tel que $f_0(x) = 0$ au voisinage de X et $f_0(x) = f(x)$ au voisinage de 0. Soit

$h \in C^\infty((0, \infty))$ telle que $h(x) = 1$ au voisinage de 0, $h(x) = 0$ au voisinage de X et pour $x > X$; on pose $f_0 = hf$. C'est une fonction continue dans $L^2(I)$ et :

$$-f_0^{(2)} + \mu f_0 = h(-f^{(2)} + \mu f) - (h''f + 2h'f')$$

Comme h est bornée, le premier terme appartient à $L^2(I)$; le deuxième également car il est une fonction bornée à un support compact dans $(0, \infty)$; donc $-f_0^{(2)} + \mu f_0$ est une fonction $\tau(f_0) \in L^2(I)$, i.e. $f_0 \in D(T)^*$.

b) Montrons que $\int_0^X \phi_0(\lambda) \tau(\phi_0)(\lambda) d\lambda = 0$, ϕ_0 étant la solution régulière de $-g^{(2)} + \mu g = 0$. En particulier $\tau(\phi_0) = 0$, donc, d'après l'identité de Lagrange (cf. Annexe 2) appliquée sur $[x, X]$ en tenant compte de $f_0(X) = f_0^+(X) = 0$:

$$\int_x^X \phi_0(\lambda) \tau(\phi_0)(\lambda) d\lambda = \{\phi_0, \phi_0\}(x)$$

Mais ϕ_0 et $\tau(\phi_0)$ sont de carré intégrable au voisinage de 0, c'est-à-dire la limite pour $x \rightarrow 0$ du membre de gauche existe. f étant égale à f_0 au voisinage de 0, il vient

$$\int_0^X \phi_0(\lambda) \tau(\phi_0)(\lambda) d\lambda = \{\phi_0, f\}(0) \left(\equiv \lim_{x \rightarrow 0} \{\phi_0, f\}(x) \right)$$

Il suffit de montrer que le membre de droite est 0. Si h est comme plus haut, c'est clair que $\tilde{f}_0 = h\phi_0 \in D(T^*)$. Comme $f \in D(T)$: $\{\tilde{f}_0, f\} = 0$. ϕ_0 étant nulle au voisinage de l'infini : $\{\tilde{f}_0, f\} = -\{\tilde{f}_0, f\}(0) = -\{\phi_0, f\}(0)$.

c) Nous allons noter f la fonction appelée jusqu'ici f_0 ; donc f a les propriétés : $f \in L^2((0, X))$ continue, $f(x) = 0$ au voisinage de X , $\tau(f) \in L^2((0, X))$ et $\int_0^X \phi_0(\lambda) \tau(f)(\lambda) d\lambda = 0$. Soit $\tilde{f} = \tau(f)$, donc f est solution de $-f^{(2)} + \mu f = \tilde{f}$ et $f(X) = f^+(X) = 0$. Avec les propositions 6 et 8 de l'annexe 1,

si on note χ_0 une solution de $-g^{(2)} + \mu g = 0$ telle que $W(\chi_0, \phi_0) = 1$, nous aurons : $\forall x \in (0, X)$

$$f(x) = \int_x^x (\chi_0(x) \phi_0(\lambda) - \chi_0(\lambda) \phi_0(x)) \tilde{f}(\lambda) d\lambda$$

$$f^+(x) = \int_x^x (\chi_0^+(x) \phi_0(\lambda) - \chi_0(\lambda) \phi_0^+(x)) \tilde{f}(\lambda) d\lambda$$

Il suffit de montrer que ces deux fonctions se comportent comme dans l'énoncé. Nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \int_x^x \phi_0(\lambda) \tilde{f}(\lambda) d\lambda \right| &= \left| \int_0^x \phi_0(\lambda) \tilde{f}(\lambda) d\lambda + \int_x^x \phi_0(\lambda) \tilde{f}(\lambda) d\lambda \right| = \\ &= \left| \int_0^x \phi_0(\lambda) \tilde{f}(\lambda) d\lambda \right| \leq \left(\int_0^x |\phi_0(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \left(\int_0^x |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \left(\int_0^x \lambda^{2q+2} d\lambda \right)^{1/2} \left(\int_0^x |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} = \\ &= \text{const} x^{q+\frac{3}{2}} \left(\int_0^x |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \end{aligned}$$

où la constan-

te ne dépend que de X (et l).

Alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_x^x \chi_0(x) \phi_0(\lambda) \tilde{f}(\lambda) d\lambda \right| &\leq \text{const} \cdot x^q \cdot x^{q+\frac{3}{2}} \left(\int_0^x |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} = \\ &= \text{const}(x) x^{3/2} \left(\int_0^x |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_x^x \chi_0^+(x) \phi_0(\lambda) \tilde{f}(\lambda) d\lambda \right| &\leq \text{const} \cdot x^{q-1} x^{q+\frac{3}{2}} \left(\int_0^x |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\ &= \text{const}(x) \cdot x^{1/2} \left(\int_0^x |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \end{aligned}$$

donc les deux premiers termes de f et f^+ donnent des contributions qui satisfont les affirmations de l'énoncé.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_x^{\infty} \chi_0(\lambda) \tilde{f}(\lambda) d\lambda \right| &\leq \left(\int_x^{\infty} |\chi_0(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \left(\int_x^{\infty} |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \leq \\
 &\leq \text{const}(x) \left(\int_x^{\infty} \lambda^{-2\varrho} d\lambda \right)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} = \\
 &= \begin{cases} \text{const} (x^{-2\varrho+1} - x^{-2\varrho+1})^{1/2} \left(\int_0^{\infty} |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} & \text{si } \varrho \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ \text{const} (\ln x - \ln x)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} & \text{si } \varrho = \frac{1}{2} \\ \text{const} (x^{-2\varrho+1} - x^{-2\varrho+1})^{1/2} \left(\int_0^{\infty} |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} & \text{si } \varrho > \frac{1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

De plus $|\phi_0(x)| < \text{const } x^{\ell+1}$ et $|\phi_0^+(x)| < \text{const } x^{\ell}$. On obtient donc les estimations de l'énoncé; d'une manière plus précise la constante c peut s'écrire comme :

$$c = c_0(x, \varrho) \left(\int_0^{\infty} |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2}$$

où c_0 ne dépend pas de f et où $\tilde{f}_0$ a la même forme qu'au début de la démonstration.

Q.E.D.

Lemme 4

Soit $f \in D(T^*)$:

I) si $\varrho > -\frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} f^+(x) = 0$

II) si $\varrho \geq 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} f^+(x) = 0$$

III) si $\varrho > 0$ et f est bornée au voisinage de 0, alors la conclusion est la même que pour le point II.

- IV) si $\epsilon \geq \frac{1}{2}$ alors la conclusion est la même que pour le point II (en fait on a toutes les estimations du lemme 3 si on remarque que toutes les estimations du lemme 2 peuvent être précisées, de manière à donner des résultats similaires au lemme 3).

Démonstration

a) Si $\epsilon \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ alors T a les indices de défaut $(1,1)$ ou $(2,2)$. On note ϕ_i la solution régulière de $-f^{(2)} + \mu f = if$ et χ_i une solution linéairement indépendante. Dans le premier cas l'équation $T^*f = if$ a une solution unique dans $L^2(I)$ (à un facteur multiplicatif près) et elle sera nécessairement de la forme $\alpha\phi_i + \beta\chi_i$ (supposée non-triviale). Alors $\alpha^* \phi_i^* + \beta^* \chi_i^*$ sera une solution (non-triviale) de $T^*f = -if$ (T^* est un opérateur réel) et elles engendreront respectivement $\text{Ker}(T^*-i)$ et $\text{Ker}(T^*+i)$. D'après la théorie des opérateurs symétriques, si $f \in D(T^*)$, alors il existe des constantes $c_+, c_- \in \mathbb{C}$ et $f_0 \in D(T)$ telles que :

$$\begin{aligned} f &= f_0 + c_+ (\alpha\phi_i + \beta\chi_i) + c_- (\alpha^*\phi_i^* + \beta^*\chi_i^*) = \\ &= f_0 + c_+ \alpha\phi_i + c_- \alpha^*\phi_i^* + c_+ \beta\chi_i + c_- \beta^*\chi_i^* \end{aligned}$$

Si T a les indices de défaut $(2,2)$ alors $\phi_i, \chi_i \in L^2$ et pour $f \in D(T^*)$, $\exists c_+^{\phi}, c_-^{\phi} \in \mathbb{C}$ et $f_0 \in D(T)$ et :

$$f = f_0 + c_+^{\phi} \phi_i + c_-^{\phi} \phi_i^* + c_+^{\chi} \chi_i + c_-^{\chi} \chi_i^*$$

Il est clair que nous aurons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 0 \iff$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c_+ \beta \chi_i(x) + c_- \beta^* \chi_i^*(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

dans le premier cas, et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c_+^{\chi} \chi_i(x) + c_-^{\chi} \chi_i^*(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

dans le deuxième cas.

Nous pouvons choisir χ_i tel que $W(\chi_i, \phi_i) = 2\ell + 1$. La proposition 1 implique alors : $C_+ \beta + C_- \beta^* = 0$ (respectivement $C_+^X + C_-^X = 0$). Mais alors :

$$C_+ \beta \chi_i + C_- \beta^* \chi_i^* = C_+ \beta \chi_i \sim \chi_i$$

(de manière similaire pour le deuxième cas). Donc on peut appliquer le lemme 2, c'est-à-dire nous aurons $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} f^+(x) = 0$. Si $\ell \geq 0$ alors la proposition 1 donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} C_+ \beta \chi_i(x) + C_- \beta^* \chi_i^*(x) = 0$$

et on raisonne de manière similaire. Si $\ell > 0$, on tient compte du fait que $\chi_i(x) \sim x^{-\ell}$ ($\rightarrow \infty$ pour $x \rightarrow 0$).

b) Si $\ell \geq \frac{1}{2}$, T a les indices de défaut $(0,0)$ ou $(1,1)$. Le premier cas est trivial (cf. lemme 3). Dans le deuxième cas l'équation $T^*f = if$ a une solution unique dans $L^2(I)$, nécessairement de la forme $\alpha\phi_i + \beta\chi_i$. Si $\beta \neq 0$ alors $x \rightarrow 0$ implique : $\alpha\phi_i(x) + \beta\chi_i(x) \sim \beta x^{-\ell}$, la fonction ne sera donc pas de carré intégrable au voisinage de 0. Donc $\beta = 0$ et, comme plus haut :

$$f = f_0 + c_+ \alpha \phi_i + c_- \alpha^* \phi_i^*$$

$$\text{donc } f \in D(T^*) \implies \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \rightarrow 0 \text{ et } \sqrt{x} f^+(x) \rightarrow 0$$

Q.E.D.

Proposition 3

Supposons ∞ dans le cas du point limite. Alors l'opérateur H défini par :

$$D(H) = \left\{ f \in D(T^*) \mid \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 0 \right\}$$

$$H = T^*|_{D(H)}$$

est une extension autoadjointe de T. De plus :

1) Si $q \geq 0$ alors $D(H) = \left\{ f \in D(T^*) \mid \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \right\}$

2) Si $q > 0$ alors $D(H) = \left\{ f \in D(T^*) \mid \begin{array}{l} f \text{ est bornée au voi-} \\ \text{sinage de } 0 \end{array} \right\}$

3) Si $q \geq \frac{1}{2}$ alors $D(T) = D(H) = D(T^*)$

Démonstration

Le lemme 4 et la proposition 2 impliquent 1), 2) et 3) et de plus :

$$D(H) = \left\{ f \in D(T^*) \mid \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} f'(x) = 0 \right\}$$

Remarquons d'abord que $\forall f, g \in D(T^*)$ nous avons $\{f, g\}(\infty) = 0$. En fait, comme dans la démonstration du lemme 3, $\exists f_0, g_0 \in D(T^*)$ telles que $f_0(x) = g_0(x) = 0$ pour $x < X + \varepsilon$ (avec $X > 0$ fixé et $\varepsilon > 0$) et $f_0(x) = f(x)$, $g_0(x) = g(x)$ au voisinage de l'infini (la fonction h sera égale à 1 dans un voisinage de l'infini, donc h' et h'' sont à support compact). Alors $\{f, g\}(\infty) = \{f_0, g_0\}(\infty)$. D'autre part f_0, g_0 seront dans le domaine de l'opérateur maximal engendré par τ dans $L^2((X, \infty))$, pour lequel X est extrémité régulière et ∞ est dans le cas du point limite (donc son adjoint a les indices de défaut (1,1)). Des remarques faites avant la proposition 5 (Annexe 2) il suit que $\{f_0, g_0\}(\infty) = 0$.

Il suit que :

$$f, g \in D(T^*) \Rightarrow \{f, g\} = - \{f, g\} (*)$$

donc $f, g \in D(H) \Rightarrow$:

$$\begin{aligned} \langle Hf, g \rangle - \langle f, Hg \rangle &= \{f, g\} = - \lim_{x \rightarrow 0} (f^*(x) g^+(x) - f^{+*}(x) g(x)) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f^*(x)}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} g^+(x) - \sqrt{x} f^{+*}(x) \cdot \frac{g(x)}{\sqrt{x}} \right) \end{aligned}$$

Du lemme 3 il suit que H est une extension symétrique de T .

D'après la théorie des opérateurs symétriques, il suffit de

montrer encore que $\text{Im } (H - \lambda) = (H - \lambda)L^2(I) = L^2(I) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Dans la suite on fixera $\lambda \notin \mathbb{R}$; H étant symétrique $H - \lambda$ est injectif, i.e. si $f \in L^2$ alors $(H - \lambda)g = f$ a au plus une solution $g \in L^2$.

Soient ϕ_λ la solution régulière de $-u^{(2)} + \mu u = \lambda u$ et χ_λ une solution de la même équation de carré intégrable au voisinage de l'infini; ∞ étant dans le cas du point limite et $\lambda \notin \mathbb{R}$, χ_λ existe et est unique à une constante multiplicative près; on détermine uniquement χ_λ en posant la condition $W(\chi_\lambda, \phi_\lambda) = 1$ (ϕ_λ et χ_λ ne sont pas proportionnelles, car $\phi_\lambda \notin L^2(I)$; sinon on aurait $\phi_\lambda \in D(H)$ et $H\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$, i.e. l'opérateur symétrique H aurait une valeur propre $\lambda \notin \mathbb{R}$). Pour tout $f \in L^2(I)$ on pose :

$$g(x) = \chi_\lambda(x) \int_0^x \phi_\lambda(s) f(s) ds + \phi_\lambda(x) \int_x^\infty \chi_\lambda(s) f(s) ds$$

(les deux intégrales convergent absolument). D'après ce qui précède, il suffit de montrer que $g \in D(H)$ et $(H - \lambda)g = f$. En dérivant g au sens des distributions et en utilisant la proposition 3 (Annexe 1) on voit que g est absolument continue, dérivable à droite en chaque $x \in I$ et $\forall x \in I$:

$$g^+(x) = \chi_\lambda^+(x) \int_0^x \phi_\lambda(s) f(s) ds + \phi_\lambda^+(x) \int_x^\infty \chi_\lambda(s) f(s) ds$$

Donc g^+ est une fonction à variation finie et sa dérivée au sens des distributions est la mesure (cf. proposition 3, Annexe 1):

$$\begin{aligned} g^{(2)}(dx) &= \chi_\lambda^{(2)}(dx) \int_0^x \phi_\lambda(s) f(s) ds + \chi_\lambda^+(x) \phi_\lambda(x) f(x) dx + \\ &\quad + \phi_\lambda^{(2)}(dx) \int_x^\infty \chi_\lambda(s) f(s) ds - \phi_\lambda^+(x) \chi_\lambda(x) f(x) dx = \\ &= \chi_\lambda(x) (\mu(dx) - \lambda dx) \int_0^x \phi_\lambda(s) f(s) ds + \\ &\quad + \phi_\lambda(x) (\mu(dx) - \lambda dx) \int_x^\infty \chi_\lambda(s) f(s) ds - \\ &\quad - (\chi_\lambda(x) \phi_\lambda^+(x) - \chi_\lambda^+(x) \phi_\lambda(x)) f(x) dx = \\ &= (\mu(dx) - \lambda dx) g(x) - W(\chi_\lambda, \phi_\lambda) f(x) dx \end{aligned}$$

Comme $W(\chi_\lambda, \phi_\lambda) = 1$, nous aurons $\tau(g) - \lambda g = f$; donc il suffit de montrer encore que $g \in D(H)$. Pour calculer le comportement de $g(x)$ au voisinage de 0, on fait les mêmes estimations que dans le lemme 3 : on voit que les termes $\chi_\lambda(x) \int_0^x \phi_\lambda(s) f(s) ds$ et $\chi_\lambda^+(x) \int_x^\infty \phi_\lambda(s) f(s) ds$ sont majorés par $c(x) x^{3/2} \left(\int_0^x |f(s)|^2 ds \right)^{1/2}$ respectivement $c(x) x^{1/2} \left(\int_0^x |f(s)|^2 ds \right)^{1/2}$ pour tout $x \in (0, X)$ (où $X > 0$ quelconque et c ne dépend que de X). Pour les termes qui restent, si $x < X$:

$$\begin{aligned} \left| \int_x^\infty \chi_\lambda(s) f(s) ds \right| &\leq \left(\int_x^\infty |\chi_\lambda(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_x^\infty |f(s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_x^x |\chi_\lambda(s)|^2 ds + \int_x^\infty |\chi_\lambda(s)|^2 ds \right)^{1/2} \|f\|_{L^2(I)} \end{aligned}$$

En estimant $\int_x^\infty |\chi_\lambda(s)|^2 ds$ comme dans la démonstration du lemme 3, on obtient exactement les mêmes inégalités pour $g(x)$ et $g^+(x)$ (et $x \in (0, X)$) que dans l'énoncé du lemme 3. Il suffit donc de montrer encore que $g \in L^2(I)$; pour cela nous suivons une méthode de Stone : pour $X < \infty$ on pose $f_X(x) = f(x)$ si $x < X$ et $f_X(x) = 0$ si $x > X$ et on note g_X la fonction associée à f_X (de la même manière que g est associé à f).

Alors si $x > X$ nous avons :

$$g_X(x) = \chi_\lambda(x) \int_0^x \phi_\lambda(s) f(s) ds$$

i.e. $g_x \in L^2(I)$ et le raisonnement déjà fait montre que $g_x \in D(H)$ et $(H-\lambda)g_x = f_x$. Comme H est symétrique et réel, il a une extension autoadjointe $\hat{H}$, donc $(\hat{H}-\lambda)g_x = f_x$ et $\text{Im } \lambda \neq 0 \Rightarrow g_x = (\hat{H}-\lambda)^{-1}f_x$, d'où :

$$\|g_x\| \leq \frac{1}{|\text{Im } \lambda|} \|f_x\| \leq \frac{1}{|\text{Im } \lambda|} \|f\|$$

D'autre part, on voit facilement que $\lim_{x \rightarrow \infty} g_x(x) = g(x)$ uniformément sur tout compact $[a, b] \subset (0, \infty)$; le théorème de Lebesgue donne :

$$\int_a^b |g|^2 dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^b |g_x|^2 dx \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \sup \|g_x\|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{|\text{Im } \lambda|}$$

et comme $[a, b] \subset (0, \infty)$ est quelconque il suit que :

$$\|g\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{|\text{Im } \lambda|} \|f\|_{L^2(I)} < \infty$$

Q.E.D.

Dans la démonstration précédente, on a vu aussi les faits suivants :

Corollaire :

Dans les conditions de la proposition 3 nous avons :

- 1) Si $f \in D(H)$ alors f a les mêmes propriétés que dans le lemme 3.
- 2) Soient $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, ϕ_λ la solution régulière de $-g^{(2)} + \mu g = \lambda g$ et χ_λ la solution de cette équation uniquement déterminée par $\chi_\lambda \in L^2(1, \infty)$ et $W(\chi_\lambda, \phi_\lambda) = 1$. Alors la résolvante $(H-\lambda)^{-1}$ a la représentation suivante : si $f \in L^2(I)$ alors :

$$[(H-\lambda)^{-1}f](x) = \chi_\lambda(x) \int_0^x \phi_\lambda(s) f(s) ds + \phi_\lambda(x) \int_x^\infty \chi_\lambda(s) f(s) ds$$

pour tout $x \in (0, \infty)$.

Donc si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ alors $(H - \lambda)^{-1}$ est un opérateur intégral ayant comme noyau :

$$G_{\lambda}(x, y) = \begin{cases} \phi_{\lambda}(y) \chi_{\lambda}(x) & \text{si } 0 < y < x < \infty \\ \phi_{\lambda}(x) \chi_{\lambda}(y) & \text{si } 0 < x < y < \infty \end{cases}$$

Proposition 4

Supposons qu'en plus des conditions posées sur ℓ et v au début du paragraphe 1, au voisinage de l'infini v est de la forme $v(dx) = v_s(dx) + V_L(x)dx$, où $|v_s|((x, \infty)) < \infty$ et $V_L \in (L^{\infty}((x, \infty)))_{\varepsilon}$ pour x suffisamment grand; alors ∞ est dans le cas du point limite et l'opérateur H défini dans la proposition 3 coïncide avec l'opérateur H défini dans la proposition 9 (Annexe 2).

Démonstration

a) On utilise la proposition 8 (annexe 2).

b) On note H_1 l'opérateur de la proposition 9 (annexe 2) et H_2 celui de la proposition 3. D'après la proposition 7 (annexe 2) nous avons $D(H_1) = D(T^*) \cap \mathcal{H}_0^1$ et $T \subset H_1 \subset T^*$; le lemme 2 (annexe 2) implique que si $f \in D(H_1)$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 0$, i.e. $f \in D(H_2)$.

Il suit que $H_1 \subset H_2$; donc aussi : $H_2 = H_2^* \subset H_1^* = H$, c'est-à-dire $H_1 = H_2$.

Q. E. D.

Citons maintenant un résultat essentiel pour la suite, dû à I.S. Kac (1) (théorème 13 et paragraphe 3; voir aussi Haimark (1) Ch. VI, paragraphe 21 pour la méthode de démonstration de la

dernière partie de la proposition suivante).

Proposition 5

Sous les mêmes hypothèses et notations que dans la proposition 3, il existe une mesure positive (borélienne, régulière) $\mathfrak{s}$ sur $\mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

si $f \in L^2(I)$ alors l'intégrale :

$$(\mathcal{F}f)(\lambda) = \int_I \phi_\lambda(x) f(x) dx$$

existe en moyenne dans $L^2_{\mathfrak{s}}(\mathbb{R})$.

De cette façon on définit un opérateur unitaire

$$\mathcal{F} : L^2(I) \rightarrow L^2_{\mathfrak{s}}(\mathbb{R}) \quad \text{dont l'inverse est :}$$

$$(\mathcal{F}^{-1}F)(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi_\lambda(x) F(\lambda) \mathfrak{s}(d\lambda)$$

(l'intégrale converge en moyenne dans $L^2(I)$).

De plus $\mathcal{F}H\mathcal{F}^{-1}$ est l'opérateur Λ de multiplication par la variable indépendante λ dans $L^2_{\mathfrak{s}}(\mathbb{R})$.

3. La solution de Jost

A partir de maintenant, en dehors des hypothèses faites sur ℓ et v au paragraphe 1, on suppose que :

il existe un voisinage (X, ∞) de l'infini où v est de la forme :

$$v(dx) = 2m V_S(dx) + 2m V_L(x) dx$$

avec :

1) $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$ (la masse)

2) V_S est une mesure à variation bornée (i.e. $\int_{X+0}^{\infty} |V_S|(dx) < \infty$)

3) V_L est une fonction à variation bornée (i.e. $\int_{X+0}^{\infty} |dV_L(x)| < \infty$)

et : $\lim_{x \rightarrow \infty} V_L(x) = 0$

Nous allons déduire en particulier le comportement asymptotique ($x \rightarrow \infty$) des solutions régulières ϕ_λ pour $\lambda > 0$; mais ce résultat est connu, étant dû à A. Wintner (1).

Nous considérons le plan complexe $\mathbb{C}$ privé du demi-axe réel $[0, \infty)$ et choisissons pour $z \mapsto \arg z$ la détermination prenant ses valeurs dans $(0, 2\pi]$ (donc pour $\lambda > 0$ nous avons $\arg \lambda = 2\pi$). On définit $\sqrt{z}$ en prenant la détermination à partie imaginaire négative : il suit que $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\sqrt{z} = -|z|^{1/2} \exp\left(i \frac{\arg z}{2}\right) = -|z|^{1/2} \cos \frac{\arg z}{2} - i |z|^{1/2} \sin \frac{\arg z}{2}$$

En particulier, pour $\lambda > 0$ nous avons :

$$\sqrt{\lambda} > 0 \text{ et } \sqrt{\lambda \pm i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sqrt{\lambda \pm i\varepsilon} = \mp \sqrt{\lambda}$$

Soient $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ et $X < \infty$ suffisamment grand pour que la décomposition précédente de v ait un sens et tels que :

$$x \geq X \Rightarrow \varepsilon^2 - 2m |V_L(x)| \geq \delta > 0$$

On note :

$$\mathbb{C}_-^\varepsilon = \{K \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} K \leq 0 \text{ et } |K| \geq \varepsilon\}$$

et $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_-^\varepsilon$ son intérieur.

Pour $x > X$ et $K \in \overset{\circ}{\mathbb{C}}_-^\varepsilon$ on définit :

$$\varphi(x, K) = \int_X^x \sqrt{K^2 - 2m V_L(\lambda)} \, d\lambda$$

Pour chaque $x > X$ on définit $\varphi(x, \cdot) : \mathbb{C}_-^\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}$ comme le prolongement par continuité de la fonction précédente. Il suit que pour $K \in \mathbb{R}$ on a :

$$K \geq \pm \varepsilon \Rightarrow \varphi(x, K) = \int_X^x \sqrt{K^2 \mp i0 - 2m V_L(\lambda)} \, d\lambda = \pm \int_X^x \sqrt{K^2 - 2m V_L(\lambda)} \, d\lambda$$

(avec $\sqrt{K^2 - 2m V_L(\lambda)} > 0$).

Remarque :

Si $\operatorname{Im} K \neq 0$, alors il existe une constante $C = C(K)$ telle que :

$$1) \quad x \geq X \Rightarrow \operatorname{Im} \varphi(x, K) \leq -C x + C$$

$$2) \quad C > 0$$

(car $\Im_{\mu} \varphi(x, \kappa) = - \int_x^{\infty} |\kappa^2 - 2\mu V_L(s)|^{1/2} \sin \frac{\arg(\kappa^2 - 2\mu V_L(s))}{2} ds$
 et $K^2 = \lambda + i\mu$ avec $\mu = 2 \operatorname{Re} K \cdot \Im_{\mu} K = 0$ si et seule-
 ment si $\operatorname{Re} K = 0$; si $\operatorname{Re} K \neq 0$, c'est évident et si $\operatorname{Re} K = 0$,
 comme $V_L(s) \rightarrow 0$ pour $s \rightarrow \infty$, nous aurons $\arg(\kappa^2 - 2\mu V_L(s)) = \pi$
 pour s suffisamment grand, et c'est donc aussi évident).

En particulier : $K \in \mathbb{C}_-^E \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-i\varphi(x, \kappa)} = 0$

Nous allons définir la solution de Jost $f(\cdot, K)$ de $-f^{(2)} + \mu f = K^2 f$ pour $K \in \mathbb{C}_-^E$ par la condition :

$$f(x, \kappa) \sim \exp(-i\varphi(x, \kappa))$$

pour $x \rightarrow \infty$ (généralisation de la notion de solution de Jost
 définie pour $V_L = 0$).

Proposition 6

Dans les conditions du début de ce paragraphe, pour tout $K \in \mathbb{C}_-^E$
 le système :

$$\begin{cases} -f^{(2)} + \mu f = \kappa^2 f \\ \lim_{x \rightarrow \infty} e^{i\varphi(x, \kappa)} \cdot f(x) = 1 \end{cases}$$

a une solution unique $f(\cdot, K)$. De plus, nous avons :

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{i\varphi(x, \kappa)} f(x, \kappa) = 1$ uniformément quand K parcourt $\mathbb{C}_-^E$

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{i\varphi(x, \kappa)} f^+(x, \kappa) = -i\kappa$ uniformément quand K parcourt des
 compacts dans $\mathbb{C}_-^E$.

2) La fonction $(x, K) \mapsto f(x, K)$ est continue sur $(0, \infty) \times \mathbb{C}_-^E$

La fonction $K \mapsto f^+(x, K)$ est continue sur $\mathbb{C}_-^\varepsilon$ ($\forall x > 0$)

3) Pour tout $x \in (0, \infty)$ les applications :

$$\mathbb{C}_-^\varepsilon \ni K \mapsto f(x, K)$$

$$\mathbb{C}_-^\varepsilon \ni K \mapsto f^+(x, K)$$

sont analytiques

4) Il existe une constante $c < \infty$ telle que $\forall x \geq X, \forall K \in \mathbb{C}_-^\varepsilon$

$$|f(x, K)| \leq c e^{\operatorname{Im} \varphi(x, K)}$$

5) Si $K \in \mathbb{R}, |K| \geq \varepsilon$ alors $f(\cdot, K) = f^*(\cdot, -K)$

Si $K \geq \varepsilon$, alors les $f(\cdot, \pm K)$ sont des solutions linéairement indépendantes de la même équation,

$$W(f(\cdot, -K), f(\cdot, +K)) = -2iK$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[f(x, \mp K) - e^{\pm i \int_x^{\infty} \sqrt{K^2 - 2uV_L(u)} du} \right] = 0$$

6) Soit g une solution de $-g^{(2)} + \mu g = K^2 g$ avec $\operatorname{Im} K < 0$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-i\varphi(x, K)} g(x) = -\frac{1}{2iK} W(g, f(\cdot, K))$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-i\varphi(x, K)} g^+(x) = -\frac{1}{2} W(g, f(\cdot, K))$$

Démonstration

a) Dans la suite nous allons travailler seulement sur (X, ∞) ; pour $x < X$, $f(x, K)$ sera définie comme la solution de l'équation vérifiant les conditions à la limite $f(X) = f(X, K)$ et $f^+(X) = f^+(X, K)$; les propriétés de continuité et d'analyticité restent justes à cause de la continuité et de l'analyticité des conditions initiales.

b) Comme V_L est à variation bornée, nous aurons : $\forall x \in (X, \infty)$: $\varphi^+(x, K) = \sqrt{K^2 - 2m V_L(x+0)}$. Il est clair que $\varphi^+(\cdot, K)$ est aussi à variation finie ; nous montrerons plus tard que sa variation est en fait bornée.

Nous allons établir quelques propriétés de la fonction $\varphi^+(\cdot, K)$.

Tout d'abord : $|\varphi^+(x, K)| = |K^2 - 2m V_L(x+0)|^{1/2} \geq$
 $\geq |K^2 - 2m V_L(x+0)|^{1/2} \geq \delta^{1/2} > 0, \text{ i.e. } \forall x \geq X$

$\forall K \in \mathbb{C}_-^E : |\varphi^+(x, K)|^{-1} \leq \delta^{-1/2}$. Montrons maintenant que $x \mapsto (\varphi^+(x, K))^{-1}$ est à

variation bornée indépendamment de $K \in \mathbb{C}_-^E$. Si $s_1 < s_2$ et si on applique le théorème de la moyenne (Dieudonné (1)

8.5.4) à la fonction $t \mapsto t^{-1/2}$, il vient :

$$\begin{aligned} |(\varphi^+(s_1, K))^{-1} - (\varphi^+(s_2, K))^{-1}| &= |(K^2 - 2m V_L(s_1+0))^{-1/2} - (K^2 - 2m V_L(s_2+0))^{-1/2}| \leq \\ &\leq \sup \left| \frac{1}{2} t^{-3/2} \right| \cdot |K^2 - 2m V_L(s_1+0) - K^2 + 2m V_L(s_2+0)| \end{aligned}$$

où le supremum doit être pris sur le segment dont les extrémités sont $K^2 - 2m V_L(s_1+0)$ et $K^2 - 2m V_L(s_2+0)$ (dans $\mathbb{C}$); donc :

$$\begin{aligned} \sup |t^{-3/2}| &= \sup_{\xi \in [0,1]} |K^2 - 2m V_L(s_1+0) + \xi(K^2 - 2m V_L(s_2+0) - K^2 + 2m V_L(s_1+0))|^{-3/2} \\ &= \sup_{\xi \in [0,1]} |K^2 - 2m [V_L(s_1+0) + \xi(V_L(s_2+0) - V_L(s_1+0))]|^{-3/2} \end{aligned}$$

Le point $2m [V_L(s_1+0) + \xi(V_L(s_2+0) - V_L(s_1+0))]$ est compris entre $2m V_L(s_1+0)$ et $2m V_L(s_2+0)$ donc

$$E^2 - 2m |V_L(s_1+0) - \xi(V_L(s_2+0) - V_L(s_1+0))| \geq \delta$$

Donc :

$$\sup |t^{-3/2}| \leq \sup_{\xi \in [0,1]} \left(|K|^2 - 2m |V_L(\lambda_1+0) + \frac{m}{\xi} (V_L(\lambda_2+0) - V_L(\lambda_1+0))| \right)^{3/2} \leq \delta^{-3/2}$$

Alors :

$$|(\varphi^+(\lambda_1, K))^{-1} - (\varphi^+(\lambda_2, K))^{-1}| \leq \frac{1}{2} \delta^{-3/2} \cdot 2m |V_L(\lambda_2+0) - V_L(\lambda_1+0)|$$

en particulier :

$$\int_{x+0}^{\infty} |d \frac{1}{\varphi^+(\lambda, K)}| \leq m \delta^{-3/2} \int_{x+0}^{\infty} |dV_L(\lambda)| < \infty$$

De la même façon, on montre que $\varphi^+(\cdot, K)$ est à variation bornée uniformément en $K \in \mathbb{C}_-^\varepsilon$:

$$\begin{aligned} |\varphi^+(\lambda_1, K) - \varphi^+(\lambda_2, K)| &= |(K^2 - 2m V_L(\lambda_1+0))^{1/2} - (K^2 - 2m V_L(\lambda_2+0))^{1/2}| \leq \\ &\leq \sup |\frac{1}{2} t^{-1/2}| \cdot |K^2 - 2m V_L(\lambda_1+0) - K^2 + 2m V_L(\lambda_2+0)| \leq \\ &\leq m \delta^{-1/2} |V_L(\lambda_2+0) - V_L(\lambda_1+0)| \end{aligned}$$

Il suit que :

$$|\varphi^{(2)}|(d\lambda, K) \leq m \delta^{-1/2} |dV_L(\lambda)| \quad \text{sur } (x, \infty)$$

en particulier que :

$$\int_{x+0}^{\infty} |d\varphi^+(\lambda, K)| \leq m \delta^{-1/2} \int_{x+0}^{\infty} |dV_L(\lambda)| < \infty$$

uniformément en $K \in \mathbb{C}_-^\varepsilon$.

c) Nous utiliserons plus tard la fonction :

$$G_K(x, y) = \int_x^y e^{-2i(\varphi(y, K) - \varphi(x, K))} d\lambda$$

définie pour $x, y \geq X$ et $K \in \mathbb{C}_-^E$; elle est évidemment continue sur $(X, \infty) \times (X, \infty) \times \mathbb{C}_-^E$ et analytique en K dans $\mathring{\mathbb{C}}_-^E$.
 Si $y \geq s \geq x$ alors $\text{Im}(\varphi(y, K) - \varphi(x, K)) = \int_x^y \gamma_m \sqrt{K^2 - 2m V_L(\lambda)} d\lambda \leq 0$
 donc $|\exp(-2i(\varphi(y, K) - \varphi(x, K)))| \leq 1$. Il suit que pour
 $x \leq y$ et $K \in \mathbb{C}_-^E$:

$$\begin{aligned} |G_K(x, y)| &= \left| \frac{1}{2i\varphi^+(y, K)} - \frac{e^{-2i(\varphi(y, K) - \varphi(x, K))}}{2i\varphi^+(x, K)} - \frac{1}{2i} \int_{x+0}^{y+0} e^{2i\varphi(\lambda, K)} d\frac{1}{\varphi^+(\lambda, K)} \right| \\ &\leq \frac{1}{2|\varphi^+(y, K)|} + \frac{1}{2|\varphi^+(x, K)|} + \frac{1}{2} \int_{x+0}^{y+0} \left| d\frac{1}{\varphi^+(\lambda, K)} \right| \leq \\ &\leq \delta^{-\frac{1}{2}} + m \delta^{-\frac{3}{2}} \int_{x+0}^{\infty} |dV_L(\lambda)| = M < \infty \end{aligned}$$

i.e. $\forall x \leq y$ et $K \in \mathbb{C}_-^E$ nous aurons $|G_K(x, y)| \leq M$ avec M indépendant de x, y, K .

d) Soit $F = e^{i\varphi} \cdot f$; alors F est à variation finie si et seulement si f a cette propriété, et alors (cf. proposition 3, Annexe 1) $f^{(1)} = -i\varphi^+ e^{-i\varphi} F + e^{-i\varphi} F^{(1)}$. Comme $-i\varphi^+ e^{-i\varphi} F$ est à variation finie, $F^{(1)}$ est à variation finie si et seulement si $f^{(1)}$ a cette propriété, et alors :

$$f^{(2)} = -i\varphi^{(2)} e^{-i\varphi} F - \varphi^{+2} e^{-i\varphi} F - 2i\varphi^+ e^{-i\varphi} F^{(1)} + e^{-i\varphi} F^{(2)}$$

(quand on applique la proposition 3 (Annexe 1) au terme $\varphi^+ e^{-i\varphi} F$ on tient compte du fait que : $F^{(1)}$ à variation finie $\Rightarrow F$ continue). Comme $\varphi^{+2}(x, K) = K^2 - 2m V_L(x + 0) = K^2 - 2m V_L(x)$ presque partout, et donc aussi au sens des distributions, on obtient facilement :

$$-f^{(2)} + (\mu - K^2) f = -e^{i\varphi} (e^{-2i\varphi} F^+)^{(1)} + (\mu_s + i\varphi^{(2)}) e^{-i\varphi} F$$

en particulier (nous avons noté : $\mu_s(dx) = \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} dx + 2uV_s(dx)$) :

$$-f^{(2)} + \mu f = \kappa^2 f \iff -(\bar{e}^{2i\varphi} F^{(1)})' + (\mu_s + i\varphi^{(2)}) \bar{e}^{-2i\varphi} F = 0$$

En intégrant la dernière équation et en tenant compte du fait que l'on désire une solution F telle que $F(x) \rightarrow 1$ ($x \rightarrow \infty$), on peut justifier l'introduction de l'équation intégrale suivante :

$$F(x, \kappa) = 1 + \int_{x+\infty}^{\infty} G_{\kappa}(x, y) F(y, \kappa) (\mu_s(dy) + i\varphi^{(2)}(dy, \kappa))$$

(nous allons montrer plus tard que la solution bornée de cette équation est aussi solution de l'équation différentielle précédente pour F).

e) Nous allons résoudre l'équation intégrale par approximations successives :

$$F_0(x, \kappa) = 1$$

$$F_n(x, \kappa) = \int_{x+\infty}^{\infty} G_{\kappa}(x, y) F_{n-1}(y, \kappa) (\mu_s(dy) + i\varphi^{(2)}(dy, \kappa))$$

On pose :

$$B(x, \kappa) = M \int_{x+\infty}^{\infty} (|\mu_s(dy)| + |\varphi^{(2)}(dy, \kappa)|)$$

Donc $B(\cdot, \kappa) : (X, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ est bien définie, décroissante, continue à droite et engendre la mesure $B^{(1)}(dy, \kappa) = -M (|\mu_s(dy)| + |\varphi^{(2)}(dy, \kappa)|)$ à variation uniformément bornée pour $\kappa \in \mathbb{C}_+^{\varepsilon}$:

$$|B^{(1)}(dy, \kappa)| \leq M |\mu_s(dy)| + u M \delta^{-\frac{1}{2}} |dV_L(y)|$$

(en particulier $(x, K) \mapsto B(x, K)$ est bornée sur $(X, \infty) \times \mathbb{C}_-^E$:

$$0 < B(x, K) \leq B(X, K) \leq M \left(\int_{x+0}^{\infty} |\mu_s|(dy) + \omega M \delta^{-\frac{1}{2}} \int_{x+0}^{\infty} |dV_L(y)| \right).$$

Montrons par récurrence :

$$(1) \quad |F_n(x, K)| \leq \frac{B^n(x, K)}{n!} \quad \forall x \in (X, \infty), \forall K \in \mathbb{C}_-^E$$

Pour $n = 0$ c'est évident; si c'est juste pour $n-1$ alors F_n existe et :

$$\begin{aligned} |F_n(x, K)| &\leq M \int_{x+0}^{\infty} |F_{n-1}(y, K)| (|\mu_s|(dy) + |\varphi^{(2)}|(dy, K)) \leq \\ &\leq - \int_{x+0}^{\infty} \frac{B^{n-1}(y, K)}{(n-1)!} B^{(1)}(dy, K) \leq \frac{B^n(x, K)}{n!} \end{aligned}$$

(cf. corollaire de la proposition 4, Annexe 1).

Montrons que $(x, K) \mapsto F_n(x, K)$ est continue sur (X, ∞)

Pour $n = 0$ c'est juste; supposons que c'est juste pour $n-1$.

Pour chaque (x, K) , $F_n(x, K)$ est limite de sommes intégrales du

type $S = \sum_i G_K(x, y_i) F_{n-1}(y_i, K) (|\mu_s|(\Delta_i) + i \varphi^{(2)}(\Delta_i, K))$

où $\{\Delta_i\}$ est une partition de (x, ∞) en intervalles disjoints

et $y_i \in \Delta_i$; il suffit de montrer que ces sommes convergent uni-

formément en (x, K) lorsque (x, K) parcourt des compacts dans

$(X, \infty) \times \mathbb{C}_-^E$. Mais :

$$\begin{aligned} |F_n(x, K) - S| &= \left| \sum_i \int_{\Delta_i} [G_K(x, y) F_{n-1}(y, K) - G_K(x, y_i) F_{n-1}(y_i, K)] (|\mu_s|(dy) + i \varphi^{(2)}(dy, K)) \right| \\ &\leq \sum_i \sup_{y \in \Delta_i} |G_K(x, y) F_{n-1}(y, K) - G_K(x, y_i) F_{n-1}(y_i, K)| (|\mu_s|(\Delta_i) + |\varphi^{(2)}|(\Delta_i, K)) \\ &\leq \sum_i \sup_{y \in \Delta_i} |G_K(x, y) F_{n-1}(y, K) - G_K(x, y_i) F_{n-1}(y_i, K)| (|\mu_s|(\Delta_i) + \omega \delta^{\frac{1}{2}} \int_{\Delta_i} |dV_L(y)|) \end{aligned}$$

La somme est finie; soit (N, ∞) le dernier intervalle de la partition. De l'estimation (1) et du fait que B est bornée, il suit (par récurrence) que $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{n-1}(x, K) = 0$ uniformément en

$K \in \mathbb{C}_-^\varepsilon$ pour $n \geq 2$; donc pour $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver N suffisamment grand tel que :

$$\sup_{y \in (N, \infty)} |G_K(x, y) F_{n-1}(y, K) - G_K(x, y_i) F_n(y_i, K)| \int_{N+0}^{\infty} (|\mu_s|(d\lambda) + m \delta^{-\frac{1}{2}} |dV_L(\lambda)|) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout (x, K) . Pour les termes de la somme qui restent, on tient compte du fait que $(x, y, K) \mapsto G_K(x, y) F_{n-1}(y, K)$ est uniformément continue lorsque (x, K) parcourt le compact choisi et y parcourt le compact $[X, N]$. En prenant une partition suffisamment fine de $[X, N]$ on majore ces termes par :

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_{x=0}^{N+0} |\mu_s|(d\lambda) + m \delta^{-\frac{1}{2}} |dV_L(\lambda)| \right)^{-1} \cdot \sum_i (|\mu_s(K_{\Delta_i})| + m \delta^{-\frac{1}{2}} \int_{\Delta_i} |dV_L(\lambda)|) \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } (x, K) \text{ dans le compact choisi.} \end{aligned}$$

Le raisonnement précédent implique aussi que $\forall x \in (X, \infty)$ la fonction $K \mapsto F_n(x, K)$ est analytique dans $\mathring{\mathbb{C}}_-^\varepsilon$ (par récurrence; les sommes intégrales sont évidemment analytiques en K).

Il suit que la série $F(x, K) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, K)$ converge absolument et uniformément sur $(X, \infty) \times \mathbb{C}_-^\varepsilon$, que $(X, \infty) \times \mathbb{C}_-^\varepsilon \ni \exists (x, K) \mapsto F(x, K)$ est continue et $\mathring{\mathbb{C}}_-^\varepsilon \ni K \mapsto F(x, K)$ est analytique. Le théorème de Lebesgue montre que $F(\cdot, K)$ est solution de l'équation intégrale et :

$$\begin{aligned} |F(x, K) - 1| & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^n(x, K)}{n!} = \exp(B(x, K)) - 1 \leq \\ & \leq \exp \left[\int_{x+0}^{\infty} M |\mu_s|(d\lambda) + m M \delta^{-\frac{1}{2}} |dV_L(\lambda)| \right] - 1 \xrightarrow{\text{pour } x \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

uniformément en $K \in \mathbb{C}_-^\varepsilon$. Aussi :

$$|F(x, K)| \leq \exp B(x, K) < C = \text{constante indépendante de } (x, K).$$

f) Calculons la dérivée au sens des distributions de $F_n(\cdot, K)$; on note $H(x, y) = G_K(x, y) F_{n-1}(y, K)$ et $\nu(dy) = \mu_3(dy) + i\varphi^{(2)}(dy, K)$. Si $\psi \in C_0^\infty((0, \infty))$ (avec $\psi(x) = 0$ pour $0 < c \leq x$) alors :

$$\begin{aligned} - \langle F_n^{(1)}, \psi \rangle &= \langle F_n, \psi' \rangle = \int_c^\infty dx \int_{x+0}^\infty H(x, y) \nu(dy) \psi'(x) = \\ &= \int_{c+0}^\infty \nu(dy) \int_c^y H(x, y) \psi'(x) dx = \int_{c+0}^\infty \nu(dy) \left[H(y, y) \psi(y) - H(c, y) \psi(c) - \int_c^y \psi(x) \frac{d}{dx} H(x, y) dx \right] \\ &= - \int_{c+0}^\infty \nu(dy) \int_c^y \psi(x) \frac{d}{dx} H(x, y) dx = - \int_c^\infty dx \int_{x+0}^\infty \frac{d}{dx} H(x, y) \nu(dy) \psi(x) \end{aligned}$$

Il suit que $F_n^{(1)}(\cdot, K)$ est une fonction à variation finie et que $\forall x \in (x, \infty)$, $\forall K \in \mathbb{C}_-^E$:

$$F_n^+(x, K) = \int_{x+0}^\infty \frac{d}{dx} H(x, y) \nu(dy) = - e^{2i\varphi(x, K)} \int_{x+0}^\infty e^{-2i\varphi(y, K)} F_{n-1}(y, K) (\mu_3(dy) + i\varphi^{(2)}(dy, K))$$

On obtient facilement :

$$|F_n^+(x, K)| \leq \frac{B^n(x, K)}{M n!} \quad \forall x \geq x, \quad \forall K \in \mathbb{C}_-^E$$

De la même façon, il suit que $F^{(1)}(\cdot, K)$ est une fonction à variation finie et que $\forall x \geq x, \quad \forall K \in \mathbb{C}_-^E$:

$$F^+(x, K) = - e^{2i\varphi(x, K)} \int_{x+0}^\infty e^{-2i\varphi(y, K)} F(y, K) (\mu_3(dy) + i\varphi^{(2)}(dy, K))$$

ce qui implique évidemment :

$$(e^{-2i\varphi} F^+)^{(1)} = e^{-2i\varphi} F(\mu_3 + i\varphi^{(2)})$$

i.e. $F(\cdot, K)$ est solution de l'équation différentielle initiale.

D'autre part la convergence absolue et uniforme sur $(x, \infty) \times \mathbb{C}_-^E$ de $\sum_n F_n^+(x, K)$ implique $F^+(x, K) = \sum_{n=1}^\infty F_n^+(x, K)$.

Comme on l'a vu pour $F_n(x, \cdot)$ on montre que $\mathcal{C}_-^\varepsilon \ni K \mapsto F_n^+(x, K)$ est continue et $\mathcal{C}_-^\varepsilon \ni K \mapsto F_n^+(x, K)$ est analytique (par récurrence); il suit que $\mathcal{C}_-^\varepsilon \ni K \mapsto F^+(x, K)$ est continue et $\mathcal{C}_-^\varepsilon \ni K \mapsto F(x, K)$ est analytique.

De même :

$$\begin{aligned} |F^+(x, K)| &\leq \int_{x+\varepsilon}^{\infty} |\bar{e}^{2i(\varphi(y, K) - \varphi(x, K))} F(y, K)| (|\mu_S|(dy) + |\varphi^{(2)}|(dy, K)) \\ &\leq C \int_{x+\varepsilon}^{\infty} (|\mu_S|(dy) + \omega \delta^{-\frac{1}{2}} |dV_L(y)|) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

pour $x \rightarrow \infty$ uniformément en $K \in \mathcal{C}_-^\varepsilon$.

g) D'après d) la fonction $f = \bar{e}^{i\varphi} F$ est solution de $-f^{(2)} + \mu f = K^2 f$; de plus il est clair que $f^+ = -i\varphi^+ \bar{e}^{i\varphi} F + \bar{e}^{i\varphi} F^+$; les affirmations 2), 3), 4) de l'énoncé sont donc vérifiées. L'affirmation 1) l'est aussi, si on tient compte du fait que pour $x \rightarrow \infty$: $-i\varphi^+(x, K) \rightarrow -i\sqrt{K^2} = -iK$ pour $\text{Im } K < 0$ et $-i\varphi^+(x, K) \rightarrow -i(\pm|K|) = -iK$ pour $K \geq \pm\varepsilon$ (cette convergence n'est uniforme en K que sur des compacts dans $\mathcal{C}_-^\varepsilon$).

h) Montrons 5) : d'abord, comme les $f(\cdot, \pm K)$ sont évidemment des solutions de la même équation, $W(f(\cdot, -K), f(\cdot, +K)) \equiv W$ sera une constante, i.e. si $K \geq \varepsilon$ nous avons :

$$\begin{aligned} W &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x, -K) f^+(x, +K) - f^+(x, -K) f(x, +K)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [e^{i\varphi(x, -K)} f(x, -K) \cdot e^{i\varphi(x, +K)} f^+(x, +K) - e^{i\varphi(x, -K)} f^+(x, -K) e^{i\varphi(x, +K)} f(x, +K)] \end{aligned}$$

(car $\text{Im } K = 0 \Rightarrow \varphi(x, +K) = -\varphi(x, -K)$)

$$= -iK - (+iK) = -2iK \neq 0$$

Il suit que les $f(\cdot, K)$ sont linéairement indépendantes; comme conséquence nous aurons l'unicité de $f(\cdot, K)$ pour $\text{Im } K = 0$; car si g est une autre solution ayant le même comportement asymptotique nous aurons : $g = c_+ f(\cdot, K) + c_- f(\cdot, K)$ en particulier : (si $K \geq \varepsilon$) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[(c_+ - 1) \exp(-2i \int_x^{\infty} \sqrt{K^2 - 2uV_L(u)} \, du) + c_- \right] = 0$$

Ce qui est absurde si $c_+ \neq 1$ ou $c_- \neq 0$ (car l'exposant est une fonction continue de x telle que sa limite pour $x \rightarrow \infty$ est ∞). L'unicité implique aussi que $f(\cdot, K) = f(\cdot, -K)$ si $\text{Im } K = 0$.

i) L'unicité pour $\text{Im } K < 0$ suit du fait que ∞ est dans le cas du point limite (proposition 8, annexe 2), de la remarque faite avant la proposition et de 4).

j) On peut montrer 6) en utilisant la remarque qui précède la proposition et la méthode de la proposition 1. Comme nous n'utiliserons jamais cette affirmation, nous n'entrons pas dans les détails.

Q.E.D.

Proposition 7

Soient $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ et $X < \infty$ tels que $x \geq X \Rightarrow \varepsilon^2 - 2u|V_L(u)| \geq \delta > 0$. On note ϕ_λ la solution régulière de $-f^{(2)} + uf = \lambda f$ et on considère toujours $\lambda \geq \varepsilon^2$. Sous les hypothèses faites au début de ce paragraphe, il existe des fonctions continues $[\varepsilon^2, \infty) \ni \lambda \mapsto a_\lambda \in (0, \infty)$ (donc $a_\lambda \neq 0 \, \forall \lambda$) et $[\varepsilon^2, \infty) \ni \lambda \mapsto \delta_\lambda \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\phi_\lambda(x) - a_\lambda \sin \left(\delta_\lambda + \int_x^{\infty} \sqrt{\lambda - 2uV_L(u)} \, du \right) \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\phi_{\lambda}^+(x) - \sqrt{\lambda} a_{\lambda} \cos \left(\delta_{\lambda} + \int_x^{\infty} \sqrt{\lambda - 2u V_L(u)} du \right) \right] = 0$$

uniformément lorsque λ parcourt des compacts dans $[\varepsilon^2, \infty)$. De plus :

1) a_{λ} est uniquement déterminé par ϕ_{λ} et :

$$a_{\lambda} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\phi_{\lambda}^2(x) + \frac{1}{\lambda} \phi_{\lambda}^{+2}(x) \right)^{1/2} = \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T \phi_{\lambda}^2(x) dx \right]^{1/2}$$

2) si X est fixé, alors δ_{λ} est déterminé mod 2π pour chaque $\lambda \geq \varepsilon^2$ par ϕ_{λ} . La condition qui exige que $\lambda \mapsto \delta_{\lambda}$ continue détermine cette fonction mod 2π (i.e. indépendamment de λ).

3) Si X' a les mêmes propriétés que X et si δ'_{λ} lui est associé, alors $\exists n(\lambda) \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\delta_{\lambda} = \delta'_{\lambda} + \int_{x'}^x \sqrt{\lambda - 2u V_L(u)} du + 2n(\lambda)\pi$$

Si $\lambda \mapsto \delta_{\lambda}$ et $\lambda \mapsto \delta'_{\lambda}$ sont continues, $n(\lambda)$ ne dépend pas de λ .

Démonstration :

ϕ_{λ} et $f(\cdot, \pm \sqrt{\lambda})$ étant des solutions de la même équation ($\sqrt{\lambda} \geq \varepsilon$; $\pm \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda \mp i0}$) il existe des constantes $C_{\pm \sqrt{\lambda}}$ telles que :

$$\phi_{\lambda} = \frac{1}{2i} (-C_{+\sqrt{\lambda}} f(\cdot, +\sqrt{\lambda}) + C_{-\sqrt{\lambda}} f(\cdot, -\sqrt{\lambda}))$$

Pour un $x \in I$ fixé nous aurons :

$$\begin{cases} -C_{+\sqrt{\lambda}} f(x, +\sqrt{\lambda}) + C_{-\sqrt{\lambda}} f(x, -\sqrt{\lambda}) = 2i \phi_{\lambda}(x) \\ -C_{+\sqrt{\lambda}} f^+(x, +\sqrt{\lambda}) + C_{-\sqrt{\lambda}} f^+(x, -\sqrt{\lambda}) = 2i \phi_{\lambda}^+(x) \end{cases}$$

Le déterminant du système est $-W(f(\cdot, \sqrt{\lambda}), f(\cdot, -\sqrt{\lambda})) = -2i\sqrt{\lambda} = 0$

La proposition 1 et la proposition 6(2) impliquent qu'il possède une solution $(c_{+\sqrt{\lambda}}, c_{-\sqrt{\lambda}})$ unique qui dépend continûment de $\lambda \in [\varepsilon^2, \infty)$

D'autre part, $f(\cdot, -\sqrt{\lambda}) = f(\cdot, \sqrt{\lambda})$ et le fait que ϕ_λ soit réelle impliquent $\phi_\lambda = \phi_\lambda^* = -\frac{1}{2i} (-c_{+\sqrt{\lambda}}^* f(\cdot, -\sqrt{\lambda}) + c_{-\sqrt{\lambda}}^* f(\cdot, +\sqrt{\lambda}))$.

Du fait que $f(\cdot, \pm\sqrt{\lambda})$ sont linéairement indépendantes, nous devons avoir $c_{-\sqrt{\lambda}}^* = c_{+\sqrt{\lambda}}$. Donc $\phi_\lambda = \gamma_\infty (c_{-\sqrt{\lambda}} f(\cdot, -\sqrt{\lambda}))$.

On pose $a_\lambda = |c_{-\sqrt{\lambda}}|$; alors $a_\lambda > 0 \forall \lambda$ (sinon $c_{-\sqrt{\lambda}} = 0$, i.e. $\phi_\lambda = 0$ ce qui contredit : $\phi_\lambda(x) \sim x^{2+1}$ pour $x \rightarrow 0$). On choisit une fonction continue $\lambda \mapsto \delta_\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $c_{-\sqrt{\lambda}} = a_\lambda \exp i\delta_\lambda, \forall \lambda \geq \varepsilon$.
Donc $\phi_\lambda = a_\lambda \gamma_\infty (e^{i\delta_\lambda} f(\cdot, -\sqrt{\lambda}))$ et $\phi_\lambda^+ = a_\lambda \gamma_\infty (e^{i\delta_\lambda} f^+(\cdot, -\sqrt{\lambda}))$
ce qui donne la première partie de la proposition (l'application $\lambda \mapsto a_\lambda$, étant continue, est bornée sur des compacts, ce qui donne l'uniformité de la convergence sur des compacts).

a_λ est uniquement déterminée par ϕ_λ , car la solution $(c_{+\sqrt{\lambda}}, c_{-\sqrt{\lambda}})$ est unique, et donc $|c_{-\sqrt{\lambda}}|$ l'est aussi.

Les autres propriétés découlent facilement du comportement asymptotique.

Q.E.D.

Remarque

Le lien entre ϕ_λ et $f(\cdot, \pm\sqrt{\lambda})$ ($\lambda \geq \varepsilon^2$) est donc le suivant :

$$\phi_\lambda = a_\lambda \gamma_\infty [e^{i\delta_\lambda} f(\cdot, -\sqrt{\lambda})] = a_\lambda \gamma_\infty [e^{i\delta_\lambda} f(\cdot, \sqrt{\lambda + i0})]$$

Proposition 8 :

Sous les hypothèses faites au début de ce paragraphe, les propositions 4 et 5 sont vérifiées. Avec les mêmes notations, nous aurons de plus que :

- 1) H est borné inférieurement et $\sigma(H) \cap (-\infty, 0)$ est formé de valeurs propres de multiplicité 1 ayant comme seul point d'accumulation possible 0 (donc la restriction de la mesure ϑ à $(-\infty, 0)$ est une mesure discrète).
- 2) H n'a aucune valeur propre $\lambda > 0$.
- 3) La restriction de la mesure ϑ à $(0, \infty)$ est (Lebesgue) absolument continue, de densité continue, donnée par :

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda}(\lambda) = \frac{1}{\pi \sqrt{\lambda} \alpha_\lambda^2} \quad \forall \lambda \in (0, \infty)$$

a_λ étant défini dans la proposition 7.

Démonstration

- 1) Cf. proposition 9 de l'annexe 2.
- 2) La seule solution de $\mathcal{T}(f) = \lambda f$ qui a le comportement demandé par $D(H)$ au voisinage de $x = 0$ est ϕ_λ ; si $\lambda > 0$ le comportement de ϕ_λ pour $x \rightarrow \infty$, donné dans la proposition 7, avec $a_\lambda \neq 0$, montre que ϕ_λ ne peut pas être de carré intégrable au voisinage de l'infini.
- 3) Nous utiliserons le théorème XII.2.11 de Dunford-Schwartz (2) (en suivant en cela la démonstration du théorème XIII-5.18 de Dunford-Schwartz (2)) : si $H = \int_{\mathbb{R}} \lambda E(d\lambda)$ est la

décomposition spectrale de H et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue à support compact contenu dans (λ_1, λ_2) (intervalle fini) alors :

$$F(H) = F(H) E((\lambda_1, \lambda_2)) = \lambda\text{-}\lim_{\delta \rightarrow +0} \lambda\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_1 + \delta}^{\lambda_2 - \delta} F(\lambda) \left[(H - (\lambda + i\varepsilon))^{-1} - (H - (\lambda - i\varepsilon))^{-1} \right] d\lambda$$

On considère $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; d'après la proposition 5 on obtient :

$\forall f, g \in L^2(I)$:

$$\begin{aligned} \langle f, F(H)g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)^*(\lambda) [\mathcal{F}F(H)\mathcal{F}^{-1} \cdot \mathcal{F}g](\lambda) g(d\lambda) = \\ &= \int_{(\lambda_1, \lambda_2)} F(\lambda) (\mathcal{F}f)^*(\lambda) (\mathcal{F}g)(\lambda) g(d\lambda) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\lambda_1 + \delta}^{\lambda_2 - \delta} F(\lambda) J(\lambda, \varepsilon) d\lambda \end{aligned}$$

Il nous reste à calculer les valeurs au bord $J(\lambda, +0)$ et montrer que l'on peut passer à la limite sous l'intégrale, $J(\lambda, \varepsilon)$ étant comme suit (cf. corollaire de la proposition 3) :

$$\begin{aligned} J(\lambda, \varepsilon) &= \int_I \int_I f^*(x) \frac{G_{\lambda+i\varepsilon}(x, y) - G_{\lambda-i\varepsilon}(x, y)}{2\pi i} g(y) dx dy = \\ &= \iint_{y < x} f^*(x) \frac{1}{2\pi i} \left[\phi_{\lambda+i\varepsilon}(y) \chi_{\lambda+i\varepsilon}(x) - \phi_{\lambda-i\varepsilon}(y) \chi_{\lambda-i\varepsilon}(x) \right] g(y) dx dy \\ &\quad + \iint_{y > x} f^*(x) \frac{1}{2\pi i} \left[\phi_{\lambda+i\varepsilon}(x) \chi_{\lambda+i\varepsilon}(y) - \phi_{\lambda-i\varepsilon}(x) \chi_{\lambda-i\varepsilon}(y) \right] g(y) dx dy \end{aligned}$$

Pour $\text{Im } z \neq 0$ l'équation $\tau(f) = z f$ n'a qu'une solution (à une constante multiplicative près) qui soit dans $L^2((1, \infty))$. D'après la proposition 6 (4) et la remarque qui précède la démonstration : $\int_1^\infty |f(x, \sqrt{x})|^2 dx < \infty$. Donc pour $\text{Im } z \neq 0$, $\exists c(z) \in \mathbb{C}$ telle que $\chi_z = c(z) f(\cdot, \sqrt{z})$. La constante $c(z)$ est uniquement déterminée par la condition $1 = W(\chi_z, \phi_z) = c(z) W(f(\cdot, \sqrt{z}), \phi_z)$.

Si $\text{Im } z \neq 0$, alors $W(f(\cdot, \sqrt{z}), \phi_z) \neq 0$ (sinon ϕ_z serait proportionnelle à $f(\cdot, \sqrt{z})$, donc $\phi_z \in L^2(I)$; en particulier $\phi_z \in D(H)$ et $H\phi_z = z \phi_z$, c'est-à-dire H aurait une valeur propre non-réelle ce qui est absurde).

Soient R un rectangle ouvert dans $\mathbb{C}$, dont les côtés sont parallèles aux axes, contenant $[\lambda_1, \lambda_2]$ et situé à une distance positive de l'axe imaginaire, et $R_{\pm} = \{z \in R \mid \text{Im } z \gtrless 0 \text{ et } \text{Im } z \neq 0\}$. Les propositions 1 et 6 montrent que $z \mapsto C(z)$ est une fonction analytique dans $R_+ \cup R_-$ et :

$$C(z) = \left(W(f(\cdot, \sqrt{z}), \phi_z) \right)^{-1}$$

D'autre part l'analyticité de $z \mapsto (\phi_z(x), \phi_z^+(x))$ sur $\mathbb{C}$ et la continuité de $K \mapsto (f(x, K), f^+(x, K))$ sur $\mathbb{C}^+$, montrent que $z \mapsto W(f(\cdot, \sqrt{z}), \phi_z)$ peut être étendue à une fonction continue sur $\bar{R}_+$ et sur $\bar{R}_-$ (les valeurs sur $\bar{R}_+ \cap \bar{R}_-$ de ces fonctions étant différentes). Sur $\bar{R}_{\pm} \cap \mathbb{R}$ cette fonction coïncide avec $\lambda \mapsto W(f(\cdot, \sqrt{\lambda \pm i0}), \phi_{\lambda})$; on remarque que $\lambda > 0 \implies W(f(\cdot, \sqrt{\lambda \pm i0}), \phi_{\lambda}) \neq 0$, car ϕ_{λ} et $f(\cdot, \sqrt{\lambda \pm i0})$ sont solutions de la même équation et ont un comportement asymptotique différent, donc sont linéairement indépendantes.

Il suit que l'on peut prolonger c à une fonction continue sur $\bar{R}_+$ et à une fonction continue sur $\bar{R}_-$ ($c(\lambda + i0) \neq c(\lambda - i0)$ en général, comme nous allons le voir) et que :

$$\lambda \in \bar{R}_{\pm} \cap \mathbb{R} \implies c(\lambda \pm i0) = \left(W(f(\cdot, \sqrt{\lambda \pm i0}), \phi_{\lambda}) \right)^{-1}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} W(f(\cdot, \sqrt{\lambda \pm i0}), \phi_\lambda) &= \frac{a_\lambda}{2i} [W(f(\cdot, \sqrt{\lambda}), e^{i\delta_\lambda} f(\cdot, -\sqrt{\lambda})) - \\ &- W(f(\cdot, \sqrt{\lambda}), e^{-i\delta_\lambda} f(\cdot, \sqrt{\lambda}))] = \sqrt{\lambda} a_\lambda e^{\mp i\delta_\lambda} \end{aligned}$$

Il suit que :

$$\lambda \in \bar{R}_\pm \cap \mathbb{R} \Rightarrow c(\lambda \pm i0) = \frac{e^{\pm i\delta_\lambda}}{\sqrt{\lambda} a_\lambda}$$

On remarque ausssi que $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} c(\lambda \pm i\varepsilon) = c(\lambda \pm i0)$ uniformément en $\lambda \in \bar{R} \cap \mathbb{R}$, car les fonctions $\bar{R}_\pm \ni z \mapsto c(z)$ sont continues sur un compact et donc uniformément continues.

Il suit en particulier que si $x \in I$ et $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ alors les limites $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \chi_{\lambda \pm i\varepsilon}(x) \equiv \chi_{\lambda \pm i0}(x) = c(\lambda \pm i0) f(x, \sqrt{\lambda \pm i0})$ existent uniformément en $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ et en x , lorsque x parcourt des compacts dans I (car $(x, K) \mapsto f(x, K)$ est continue sur $I \times \mathbb{C}_+^E$, donc uniformément continue sur des compacts) et il est clair que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} (\chi_{\lambda+i0} - \chi_{\lambda-i0}) &= \frac{1}{2i\sqrt{\lambda} a_\lambda} (e^{i\delta_\lambda} f(\cdot, \sqrt{\lambda+i0}) - e^{-i\delta_\lambda} f(\cdot, \sqrt{\lambda-i0})) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda} a_\lambda^2} \phi_\lambda \end{aligned}$$

En particulier nous obtenons le résultat suivant : si les fonctions $f, g \in L^2(I)$ ont des supports compacts, alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} J(\lambda, \varepsilon) = J(\lambda, +0)$ existe uniformément en $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ et :

$$\begin{aligned} J(\lambda, +0) &= \iint_{y < x} f^*(x) \phi_\lambda(y) (\pi\sqrt{\lambda} a_\lambda^2)^{-1} \phi_\lambda(x) g(y) dx dy + \\ &+ \iint_{y > x} f^*(x) \phi_\lambda(x) (\pi\sqrt{\lambda} a_\lambda^2)^{-1} \phi_\lambda(y) g(y) dx dy = \\ &= (\pi\sqrt{\lambda} a_\lambda^2)^{-1} \iint_I f^*(x) \phi_\lambda(x) g(y) \phi_\lambda(y) dx dy = (\pi\sqrt{\lambda} a_\lambda^2)^{-1} (f^* f)(\lambda) (f g)(\lambda) \end{aligned}$$

L'uniformité en λ de la convergence donne alors :

$$\begin{aligned} \int_{(\lambda_1, \lambda_2)} F(\lambda) (\mathcal{F}f)^*(\lambda) (\mathcal{F}g)(\lambda) \varrho(\lambda) d\lambda &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\lambda_1 + \delta}^{\lambda_2 - \delta} F(\lambda) \tilde{f}(\lambda, +0) d\lambda = \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(\lambda) (\mathcal{F}f)^*(\lambda) (\mathcal{F}g)(\lambda) \frac{d\lambda}{\pi \sqrt{\lambda} a_\lambda^2} \end{aligned}$$

$\forall f, g \in L^2(I)$ à supports compacts dans $(0, \infty)$ et $\forall F$ continue à support compact dans (λ_1, λ_2) . Remarquons que $\forall \lambda_0 \in (\lambda_1, \lambda_2)$ il existe $f_0 \in L^2(I)$ à support compact telle que $(\mathcal{F}f_0)(\lambda_0) \neq 0$ (sinon, on aurait $\int_\alpha^\beta \phi_{\lambda_0}(x) f(x) dx = 0 \quad f \in L^2(\alpha, \beta)$ à support compact, $\forall \alpha < \beta$ et $\alpha > 0, \beta < \infty$, donc $\phi_{\lambda_0}(x) = 0, \forall x > 0$, ce qui est absurde car $\phi_{\lambda_0}(x) \sim x^{e+1}$ pour $x \rightarrow 0$). D'autre part si f_0 est à support compact, alors $\mathcal{F}f_0$ est entière, en particulier $(\mathcal{F}f_0)(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in V_{\lambda_0}$, V_{λ_0} étant un voisinage de λ_0 . Si F est une fonction continue à support dans V_{λ_0} , alors on peut prendre dans la formule précédente $F(\lambda) |(\mathcal{F}f_0)^{-2}(\lambda)|$ au lieu de F et f_0 au lieu de f et g . Il suit que pour toute fonction F continue à support compact dans V_{λ_0} :

$$\int_{(\lambda_1, \lambda_2)} F(\lambda) \varrho(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(\lambda) \frac{d\lambda}{\pi \sqrt{\lambda} a_\lambda^2}$$

En prenant une partition de l'unité, nous aurons cette formule pour toute F continue à support dans (λ_1, λ_2) , c'est-à-dire :

$$\varrho(\lambda) = \frac{d\lambda}{\pi \sqrt{\lambda} a_\lambda^2}$$

QED

Si on applique la proposition 5 dans les conditions de la proposition précédente à un $F \in L^2_f(\mathbb{R})$ t.q. $F(\lambda) = 0$ pour $\lambda \leq 0$ (p.p.) alors :

$$(\mathcal{F}^{-1}F)(x) = \int_{(0, \infty)} \phi_\lambda(x) F(\lambda) \frac{d\lambda}{\pi \sqrt{\lambda} a_\lambda^2} = \int_{(0, \infty)} \frac{1}{\sqrt{\pi} \lambda^{1/4} a_\lambda} \phi_\lambda(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} \lambda^{1/4} a_\lambda} F(\lambda) d\lambda$$

D'autre part si $f = \mathcal{F}^{-1}F$ nous avons :

$$\int_{(0, \infty)} \frac{1}{\sqrt{\pi} \lambda^{1/4} a_\lambda} \phi_\lambda(x) f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi} \lambda^{1/4} a_\lambda} F(\lambda)$$

Les formules deviennent donc plus symétriques si on utilise $\psi_\lambda = \pi^{-1/2} \lambda^{-1/4} a_\lambda^{-1} \phi_\lambda$ (pour $\lambda > 0$) au lieu de ϕ_λ dans la définition de $\mathcal{F}$. D'autre part, il sera plus

commode d'utiliser $\kappa = \sqrt{\lambda}$ comme variable au lieu de λ ; alors si F est la même que celui avec lequel nous venons de travailler, nous aurons :

$$(\mathcal{F}^{-1}F)(x) = \int_0^{\infty} \phi_{\kappa^2}(x) F(\kappa^2) \frac{2\kappa d\kappa}{\pi \kappa a_{\kappa^2}} = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a_{\kappa^2}} \phi_{\kappa^2}(x) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a_{\kappa^2}} F(\kappa^2) d\kappa$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a_{\kappa^2}} F(\kappa^2) = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a_{\kappa^2}} \phi_{\kappa^2}(x) f(x) dx$$

$$\|\mathcal{F}^{-1}F\|_{L^2(I)}^2 = \int_0^{\infty} |(\mathcal{F}^{-1}F)(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |F(\lambda)|^2 \rho(d\lambda) = \int_0^{\infty} \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a_{\kappa^2}} F(\kappa^2) \right|^2 d\kappa$$

Ces remarques justifient les formules de la section suivante, où nous rassemblerons tous les résultats obtenus jusqu'ici.

4. Développement en fonctions propres de l'opérateur H.

Dans ce paragraphe nous allons réunir tous les résultats précédents. Les hypothèses et les notations de ce paragraphe seront toujours sous-entendues par la suite.

Soient $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$ (la masse) et $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > -\frac{1}{2}$ (le moment cinétique).

Soit V une mesure réelle sur $I = (0, \infty)$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\int_{(0,1]} x |V|(dx) < \infty$

2) on peut décomposer V en :

$$V(dx) = V_S(dx) + V_L(x) dx$$

tel que V_S soit une mesure à variation bornée

au voisinage de l'infini, V_L une fonction à variation bornée au voisinage de l'infini, et $\lim_{x \rightarrow \infty} V_L(x) = 0$

On note μ la mesure sur $(0, \infty)$ définie par :

$$\mu(dx) = \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} dx + 2m V(dx)$$

et τ l'expression différentielle associée à μ (cf. Annexe 2)

On définit l'opérateur $H : D(H) \subset L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ de la manière suivante :

$f \in D(H) \Leftrightarrow f \in L^2(I)$ est continue ; $-f^{(2)} + \mu f$ est une fonction $\tau(f) \in L^2(I)$; et nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

$$f \in D(H) \Rightarrow Hf = \frac{1}{2m} \tau(f)$$

Remarque

Se référer à la proposition 3 du paragraphe 1 et son corollaire ainsi que la proposition 7 (Annexe 2) pour d'autres propriétés de $D(H)$.

H est alors un opérateur auto-adjoint et peut être défini comme l'opérateur associé à la somme des formes sesquilineaires engendrées par l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ (avec la condition à la limite $f(0) = 0$) et par la mesure μ (cf. Annexe 2)

Le spectre de H est borné inférieurement ; son spectre essentiel est $[0, \infty)$ et la partie négative de $\sigma(H)$ (c'est-à-dire $\sigma(H) \cap (-\infty, 0)$) est formée de valeurs propres de multiplicité 1 ayant comme seul point d'accumulation possible 0.

Soient $H = \int_{\mathbb{R}} \lambda E(d\lambda)$ et $P = E((0, \infty))$.

Pour chaque $K > 0$, soit $\Psi(\cdot, K)$ l'unique solution de l'équation :

$$-\Psi^{(2)}(\cdot, K) + \mu \Psi(\cdot, K) = K^2 \Psi(\cdot, K)$$

vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Psi(x, K)}{\sqrt{x}} = 0$ (pour $K = 0$ il suffit que $\lim_{x \rightarrow 0} \Psi(x, K) = 0$; pour $K > 0$ il suffit que $\Psi(\cdot, K)$ soit bornée au voisinage de 0)

- 2) Il existe $\delta(K) \in \mathbb{R}$ et $x(K) \in [0, \infty)$ t.p. $x \geq x(K) \Rightarrow K^2 - 2mV_L(x) \geq 0$ et :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\Psi(x, K) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left(\int_{x(K)}^x \sqrt{K^2 - 2mV_L(s)} ds + \delta(K) - \frac{\theta\pi}{2} \right) \right] = 0$$

(la limite précédente sera alors uniforme en K , lorsque K parcourt des compacts dans $(0, \infty)$)

Remarques

$$I \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{-(\ell+1)} \psi(x, \kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a_{\kappa^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\ell} \psi^+(x, \kappa) = (\ell+1) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a_{\kappa^2}}$$

$$II \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\psi^+(x, \kappa) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \kappa \cos \left(\int_{x(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2uV_L(u)} \, du + \delta(\kappa) - \frac{\ell\pi}{2} \right) \right] = 0$$

III Supposons que $(\delta'(K), X'(K))$ vérifie les mêmes hypothèses que $(\delta(K), X(K))$ et, de plus, les fonctions $K \mapsto (\delta(K), X(K), \delta'(K), X'(K))$ sont continues. Alors $\exists n \in \mathbb{Z}$ indépendant de K tel que :

$$\delta(\kappa) = \delta'(\kappa) + \int_{x'(\kappa)}^{x(\kappa)} \sqrt{\kappa^2 - 2uV_L(u)} \, du + 2n\pi \quad \forall \kappa \in (0, \infty)$$

IV Dans la suite E (l'énergie) et K (l'impulsion) seront toujours liées par :

$$E = \frac{K^2}{2m}$$

On peut remarquer l'analogie entre $\int_{x(\kappa)}^x \sqrt{2u(E - V_L(u))} \, du$ et l'action réduite (ou de Maupertuis) associée à une particule classique en mouvement dans le champ produit par le potentiel central V_L (cf. Landau - Lifchitz (1) paragraphe 48 et paragraphe 44; c'est la partie radiale de l'action réduite, où on a négligé le terme βr^{-2} qui donne une force à courte portée)

Mais avons :

Pour tout $f \in PL^2(I)$ l'intégrale

$$(\mathcal{F}f)(\kappa) = \int_0^\infty \psi(x, \kappa) f(x) \, dx$$

existe en moyenne dans $L^2((0, \infty))$; l'application :

$\mathcal{F} : PL^2(I) \rightarrow L^2((0, \infty))$ est unitaire et son inverse est :

$$(\mathcal{F}^{-1}F)(x) = \int_0^{\infty} \psi(x, \kappa) F(\kappa) d\kappa$$

l'intégrale convergeant en moyenne dans $L^2(I)$.

De plus :

$\mathcal{F} H P \mathcal{F}^{-1}$ est l'opérateur de multiplication par $\frac{K^2}{2m} = E$ dans $L^2((0, \infty))$

Nous allons noter $\overset{\circ}{H}$ l'opérateur H dans le cas $V = 0$. (Voir la proposition 9, Annexe 2, pour le lien entre H et $\overset{\circ}{H}$). $\overset{\circ}{H}$ est alors un opérateur positif et n'a aucune valeur propre. On note $\overset{\circ}{\Psi}$ les fonctions Ψ correspondantes et $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ la transformation $\mathcal{F}$ associée.

C'est un fait bien connu (et une conséquence immédiate de ce qui précède) que :

$$\overset{\circ}{\Psi}(x, \kappa) = \sqrt{\kappa x} \mathcal{J}_{e+\frac{1}{2}}(\kappa x)$$

où $\mathcal{J}_{e+\frac{1}{2}}$ sont des fonctions de Bessel.

Nous avons alors l'estimation plus exacte :

$$\overset{\circ}{\Psi}(x, \kappa) \equiv \overset{\circ}{\Psi}(x\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\kappa x - \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\kappa x}\right)$$

(donc, si l'on choisit $X(K) \equiv 0$, $\delta^0(K) \equiv 0$ d'après nos conventions)
De plus $\overset{\circ}{P} = \mathcal{J}$, c'est-à-dire $\overset{\circ}{\mathcal{F}} : L^2(I) \rightarrow L^2((0, \infty))$ est unitaire.

Dans la suite de ce paragraphe nous allons donner une forme plus exacte du comportement asymptotique de $\Psi(\cdot, K)$ avec des conditions supplémentaires sur V_L .

Proposition 9

Supposons qu'en plus des conditions du début de ce paragraphe, il existe $X_0 \geq 0$ et $N \geq 2$, $N \in \mathbb{M}$ (si $N = 1$ on peut supposer $V_L = 0$) tels que

$$1) \quad \int_{X_0}^{\infty} |V_L(\lambda)|^N d\lambda < \infty$$

$$2) \quad V_L \in L^{\infty}((X_0, \infty))$$

Alors, pour tout $X \geq X_0$, il existe une fonction continue $(0, \infty) \ni K \mapsto \delta(K) \in \mathbb{R}$, uniquement déterminée mod 2π (indépendamment de K) telle que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\psi(x, K) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left(K(x - X) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) \dots (n-1-\frac{1}{2})}{n! K^{2n-1}} (2u)^n \int_X^x V_L^n(\lambda) d\lambda + \delta(K) - \frac{\pi}{2} \right) \right] = 0$$

uniformément quand K parcourt des compacts dans $(0, \infty)$.
Si nous changeons X en X' ($\geq X_0$) alors nous devons aussi changer $\delta(K)$ en $\delta'(K)$, où :

$$\delta(K) = \delta'(K) + K(X - X') + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) \dots (n-1-\frac{1}{2})}{n! K^{2n-1}} (2u)^n \int_{X'}^X V_L^n(\lambda) d\lambda$$

(mod 2π)

Démonstration

Soient $K_1 > 0$, $\varepsilon > 0$, $X_1 \geq X_0$ tels que $x \geq X_1 \Rightarrow 2m |V_L(x)| \leq K_1^2 - \varepsilon$
Pour $K \geq K_1$ et $x \geq X_1$ nous aurons $K^{-2} 2m |V_L(x)| \leq K_1^{-2} (K_1^2 - \varepsilon) < 1$
uniformément en $K \geq K_1$ et $x \geq X_1$. Donc :

$$\sqrt{K^2 - 2u V_L(\lambda)} = K \left(1 - \frac{2u V_L(\lambda)}{K^2} \right)^{1/2} = K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2} \dots (n-1-\frac{1}{2})}{n!} \left[\frac{2u V_L(\lambda)}{K^2} \right]^n$$

converge absolument et uniformément en $K \geq K_1$ et $\lambda \geq X_1$.

En particulier si on intègre sur (X_1, x) on peut permuter la somme et l'intégrale. L'inégalité (pour $n \geq N$) :

$$\int_{X_0}^{\infty} |V_L(\lambda)|^n d\lambda \leq \sup_{\lambda \geq X_0} |V_L(\lambda)|^{n-N} \int_{X_0}^{\infty} |V_L(\lambda)|^N d\lambda$$

montre que la série :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2} \dots (n-1-\frac{1}{2})}{n! K^{2n-1}} (2u)^n \int_{X_1}^{\infty} V_L^n(\lambda) d\lambda$$

converge absolument et uniformément en $K \geq K_1$.

Remarquons que K_1, ε_1, X_1 , vérifient les hypothèses de la proposition 7 (avec quelques changements de notations.) Donc

$$\psi(x, K) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left(\int_{K^2}^x \sqrt{K^2 - 2u V_L(\lambda)} d\lambda \right) \rightarrow 0$$

uniformément lorsque K parcourt des compacts dans $[K_1, \infty)$.

Mais : $K \geq K_1$, et $x \geq X_1 \Rightarrow$:

$$\begin{aligned} \int_{K^2}^x \sqrt{K^2 - 2u V_L(\lambda)} d\lambda &= \int_{K^2}^x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2} \dots (n-1-\frac{1}{2})}{n! K^{2n-1}} (2u)^n \int_{X_1}^x V_L^n(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{K^2}^x + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2} \dots (n-1-\frac{1}{2})}{n! K^{2n-1}} (2u)^n \int_{X_1}^{\infty} V_L^n(\lambda) d\lambda + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{-\frac{1}{2} \dots (n-1-\frac{1}{2})}{n! K^{2n-1}} (2u)^n \int_{X_1}^x V_L^n(\lambda) d\lambda - \\ &\quad - \sum_{n=N}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2} \dots (n-1-\frac{1}{2})}{n! K^{2n-1}} (2u)^n \int_x^{\infty} V_L^n(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

Il suffit de remarquer que le dernier terme converge vers zéro pour $x \rightarrow \infty$ uniformément en $K \geq K_1$ et de noter $\delta(K) = \frac{\ell\pi}{2}$ la somme des deux premiers termes pour obtenir la proposition dans le cas $X = X_1$ et $K \geq K_1$. Si $X \geq X_0$ quelconque il suffit alors de changer $\delta(K)$ selon la dernière formule de la proposition. On prolonge δ sur tout $(0, \infty)$ par continuité; les autres affirmations sont évidentes.

QED

Remarques

1) Dans les conditions de la proposition, nous allons noter :

$$c_n = \frac{-\frac{1}{2} (1-\frac{1}{2}) \dots (n-1-\frac{1}{2})}{n!} \quad \text{et} \quad E = E(K) = \frac{K^2}{2u}$$

Il s'ensuit :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\psi(x, \kappa) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left(\kappa(x-x) + \sum_{n=1}^{N-1} c_n \frac{\kappa}{E^n} \int_x^x V_L^n(s) ds + \delta(\kappa) - \frac{\theta \bar{\kappa}}{2} \right) \right] = 0$$

uniformément lorsque κ parcourt des compacts dans $(0, \infty)$

2) Dans le cas général, nous avons : $\kappa > 0 \Rightarrow$

$$\psi(\cdot, \kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left(e^{i\delta_{\kappa^2}} f(\cdot, -\kappa) \right)$$

où δ_{κ^2} dépend de la normalisation que nous avons choisie pour $f(\cdot, -\kappa)$ (c'est-à-dire de $\psi(x, \kappa)$ cf. proposition 6) (voir la remarque qui suit la proposition 7)

CHAPITRE II : EVOLUTIONS LIBRES MODIFIEES ET OPERATEURS D'ONDE

5. Les opérateurs $\mathcal{K}_\pm$

Nous supposons qu'on ait fait le choix d'une fonction $(0, \infty) \ni K \mapsto X(K) \in (0, \infty)$ continue et à variation finie, ayant la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t. q. } \forall x \in [X(K), \infty), \forall K \in (\varepsilon, \infty) : K^2 - 2m V_L(x) \geq \delta$$

(Il est clair que l'on peut trouver une telle fonction qui soit décroissante; intuitivement cette condition dit que la position initiale $X(K)$ de la particule classique et son énergie $K^2/2m$ doivent être telles que pour $x \geq X(K)$ la particule ne puisse plus rencontrer aucun "pic" de potentiel)

Il sera plus ~~convenable~~ dans la suite de choisir une autre détermination que celle du paragraphe 3 pour $\sqrt{K^2 - 2m V_L(\lambda)}$ si $K^2 - 2m V_L(\lambda) < 0$ on supposera toujours

$$\pm \sqrt{K^2 - 2m V_L(\lambda)} \leq 0$$

($\pm$ pour définir $\mathcal{K}_\pm$; de cette façon on a toujours :

$|\exp \pm i (Kx - \int_{X(K)}^x \sqrt{K^2 - 2m V_L(\lambda)} d\lambda)| \leq 1$; tout ce qui va suivre reste également valable avec la détermination contraire pour $\sqrt{\cdot}$, mais on devrait majorer le terme précédent par une constante $\neq 1$ en général).

Nous gardons les hypothèses et notations du paragraphe 4; la fonction $X(K)$ qui apparaît dans le comportement asymptotique de $\Psi(\cdot, K)$ sera celle que l'on a **introduit** plus haut; on choisit les

déphasages $K \mapsto \delta(K)$ de manière que cette fonction soit continue.

Pour $f \in L^2(I)$ telle que $\overset{\circ}{\mathcal{F}} f \in L^1((0, \infty))$ on définit :

$$(\mathcal{K}_{\pm} f)(x) = \int_0^{\infty} e^{\pm i(\kappa x - \int_{x(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2uV_L(s)} ds)} \overset{\circ}{\Psi}(x, \kappa) (\overset{\circ}{\mathcal{F}} f)(\kappa) d\kappa$$

$$(\tilde{\mathcal{K}}_{\pm} f)(x) = \pm \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{\mp i(\int_{x(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2uV_L(s)} ds - \frac{\pi}{2})} (\overset{\circ}{\mathcal{F}} f)(\kappa) d\kappa$$

Il est clair que :

$$\|\mathcal{K}_{\pm} f\|_{L^{\infty}(0, \infty)} \leq c \|\overset{\circ}{\mathcal{F}} f\|_{L^1(0, \infty)}$$

$$\|\tilde{\mathcal{K}}_{\pm} f\|_{L^{\infty}(0, \infty)} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\overset{\circ}{\mathcal{F}} f\|_{L^1(0, \infty)}$$

pour un $c < \infty$ indépendant de f .

La proposition suivante décrit quelques propriétés des opérateurs introduits :

Proposition 10

Si $f \in L^2(I)$ est telle que $\overset{\circ}{\mathcal{F}} f$ est à variation bornée et à support compact dans I , alors :

$$1) \quad \mathcal{K}_{\pm} e^{-i\hat{H}t} f \in L^2(I) \quad ; \quad \tilde{\mathcal{K}}_{\pm} e^{-i\hat{H}t} f \in L^2(I)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$2) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|(\mathcal{K}_{\pm} - \tilde{\mathcal{K}}_{\pm}) e^{-i\hat{H}t} f\|_{L^2(I)} = 0$$

$$3) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\tilde{\mathcal{K}}_{\pm} e^{-i\hat{H}t} f\|_{L^2(I)} = 0$$

Démonstration

Dans la suite, on considère seulement $\mathcal{K}_+$, $\tilde{\mathcal{K}}_+$

a) Rappelons (cf. paragraphe 4) que $\overset{\circ}{\Psi}(x, K) = \sqrt{xK} J_{e+\frac{1}{2}}(xK)$ et que

$$\sqrt{t} J_{e+\frac{1}{2}}(t) \leq \text{const.} \cdot t^{e+1} \quad \forall t \in (0, \infty)$$

$$\sqrt{t} J_{e+\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(t - \frac{e\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{pour } t \rightarrow +\infty$$

Si on pose $\tilde{e} = e$ pour $e \leq 0$ et $\tilde{e} = 0$ pour $e > 0$ et si on définit $\tilde{\Psi}$ par :

$$\overset{\circ}{\Psi}(xK) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(Kx - \frac{e\pi}{2}\right) + (xK)^{-1-\tilde{e}} \tilde{\Psi}(xK)$$

il est clair que $\tilde{\Psi}$ sera une fonction bornée sur $(0, \infty)$ et $t \mapsto t^{-(\tilde{e}+1)} \tilde{\Psi}(t)$ de même.

b) On introduit la décomposition précédente dans la définition de $\mathcal{K}_+ f$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_+ e^{-i\hbar t} f)(x) &= \int_0^\infty \exp\left[i\left(Kx - \int_{x(K)}^x \sqrt{K^2 - 2mV_L(\lambda)} d\lambda - \frac{K^2}{2m} t\right)\right] \cdot \frac{\tilde{\Psi}(Kx)}{(Kx)^{1+\tilde{e}}} \left(\overset{\circ}{f}\right)(K) dK \\ (2) \quad &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \int_0^\infty \exp\left[i\left(2Kx - \int_{x(K)}^x \sqrt{K^2 - 2mV_L(\lambda)} d\lambda - \frac{e\pi}{2} - \frac{K^2}{2m} t\right)\right] \cdot \left(\overset{\circ}{f}\right)(K) dK \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \int_0^\infty \exp\left[i\left(-\int_{x(K)}^x \sqrt{K^2 - 2mV_L(\lambda)} d\lambda + \frac{e\pi}{2} - \frac{K^2}{2m} t\right)\right] \cdot \left(\overset{\circ}{f}\right)(K) dK \end{aligned}$$

On note $J_1(x, t)$, $J_2(x, t)$, $J_3(x, t)$ les termes de cette expression, nous allons les estimer dans cet ordre :

c) Il est clair que $|J_1(x, t)| \leq c < \infty$ indépendamment de (x, t) et que :

$$|J_1(x, t)| \leq x^{-\tilde{e}-1} \int_0^\infty \text{const.} \cdot \left|\overset{\circ}{f}(K)\right| K^{-\tilde{e}-1} dK = c' x^{-\tilde{e}-1}$$

avec $c' < \infty$ car $0 \notin \text{supp } (\overset{\circ}{\mathcal{F}}f)$. Donc $|J_1(x,t)| \leq c (1+x)^{-\tilde{e}-1}$ avec $c < \infty$, $\forall x \in I$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Comme $e > -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 + \tilde{e} > \frac{1}{2}$, il suit que $J_1(\cdot, t) \in L^2(I)$ et que l'on peut passer à la limite sous l'intégrale dans $\|J_1(\cdot, t)\|^2 = \int_0^\infty |J_1(x,t)|^2 dx$ (théorème de Lebesgue). D'après le lemme de Riemann - Lebesgue :

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} J_1(x,t) = 0 \quad \forall x \in I ; \text{ ainsi } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|J_1(\cdot, t)\|_{L^2(I)} = 0$$

d) Nous avons $|J_2(x,t)| \leq c < \infty$ indépendamment de (x,t) .

Pour estimer J_2 dans la région des grands x , on suppose que $\text{supp } \overset{\circ}{\mathcal{F}}f \subset [a,b] \subset (0,\infty)$ et on choisit $X > 0$ tel que $K \in [a,b] \Rightarrow X \geq X(K)$ et $x \geq X \Rightarrow 2m|V_L(x)| \leq \varepsilon^2$ pour un $\varepsilon \leq \frac{a}{4}$. On note :

$$g(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \exp\left(-i \int_{X(\kappa)}^X \sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(s)} ds - i \frac{2\pi\hbar}{2}\right) \cdot (\overset{\circ}{\mathcal{F}}f)(\kappa)$$

$$\varphi(\kappa) = 2\kappa x - \int_X^x \sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(s)} ds - \frac{\kappa^2}{2m} t$$

Alors g est à variation bornée et à support dans (a,b) et

$$J_2(x,t) = \int_a^b e^{i\varphi(\kappa)} g(\kappa) d\kappa$$

Comme pour $K \geq a$ et $\varepsilon \leq \frac{a}{4}$ nous avons ($s \geq x$) :

$$\kappa^2 - 2mV_L(s) \geq \kappa^2 - \varepsilon^2 \geq (\kappa - \varepsilon)^2$$

$$2 - \frac{a}{a-\varepsilon} \geq \frac{2}{3}$$

Il suit que $x \geq X \Rightarrow$:

$$\begin{aligned} \varphi'(\kappa) &= 2x - \int_X^x \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(s)}} ds - \frac{\kappa}{m} t \geq \\ &\geq 2x - \frac{a}{a-\varepsilon} (x-X) - \frac{\kappa}{m} t \geq \frac{2}{3} x - \frac{\kappa}{m} t \end{aligned}$$

(on a tenu compte de l'inégalité :

$$\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(s)}} \leq \frac{\kappa}{\kappa - \varepsilon} \leq \frac{a}{a-\varepsilon}$$

la fonction $K \mapsto \frac{K}{K-\varepsilon}$ étant décroissante si $\varepsilon > 0$)

De même :

$$\begin{aligned} |\varphi''(\kappa)| &= \left| \int_x^{\kappa} \frac{2u V_L(\eta)}{(\kappa^2 - 2u V_L(\eta))^{3/2}} d\eta - \frac{1}{u} t \right| \leq \\ &\leq (\kappa - x) \varepsilon^2 \delta^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{u} |t| \leq \varepsilon^2 \delta^{-\frac{3}{2}} x + \frac{1}{u} |t| \end{aligned}$$

pour un $\delta > 0$ suffisamment petit.

Le lemme 1 (Annexe 3) implique :

$$|J_2(x, t)| \leq \left[\frac{2}{3} x - \frac{1}{u} \sup(\kappa t) \right]^{-1} \cdot \left[\text{const} + \text{const} \frac{\varepsilon^2 \delta^{-\frac{3}{2}} x + \frac{1}{u} |t|}{\frac{2}{3} x - \frac{1}{u} \sup(\kappa t)} \right]$$

où l'on a supposé $x \geq X$ et $\frac{2}{3} x - \frac{1}{m} \sup(\kappa t) > 0$, le supremum étant pris sur $\kappa \in [a, b]$. Si $t \geq 0$, alors $\sup(\kappa t) = bt$, il faut alors supposer $\frac{2}{3} x - \frac{b}{m} t > 0$; donc pour $x \geq \frac{3}{2} \frac{b}{m} t + \alpha$ et avec un $\alpha > 0$ nous aurons :

$$|J_2(x, t)| \leq c(t) x^{-1}$$

Ceci montre que $J_2(\cdot, t) \in L^2(I)$ pour tout $t \geq 0$. Si $t < 0$, alors $\sup(\kappa t) = at$ et $\frac{2}{3} x - \frac{1}{m} \sup \kappa t = \frac{2}{3} x + \frac{a}{m} |t|$. Comme nous l'avons vu plus haut, nous aurons $J_2(\cdot, t) \in L^2(I)$ pour tout $t < 0$, mais, cette fois, nous avons une estimation uniforme en t sur $J_2(x, t)$: pour tout $x \geq X$ et $-t \geq 1$ $|J_2(x, t)| \leq \frac{c}{x}$ avec c indépendant de t . Comme au point c), on utilise le lemme de Riemann Lebesgue pour montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|J_2(\cdot, t)\|_{L^2(I)} = 0$$

e) Nous avons à nouveau $|J_3(x, t)| \leq c^\infty$ indépendamment de (x, t) .

Nous choisissons X comme nous l'avons fait plus haut; g sera la même fonction et :

$$\varphi(\kappa) = + \int_X^x \sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(\lambda)} d\lambda + \frac{\kappa^2}{2m} t$$

donc

$$J_3(x,t) = \int_a^b e^{-i\varphi(\kappa)} g(\kappa) d\kappa$$

Alors :

$$\begin{aligned} \varphi'(\kappa) &= \int_X^x \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(\lambda)}} d\lambda + \frac{\kappa}{m} t \geq \\ &\geq \frac{a}{a+\varepsilon} (x-X) + \frac{\kappa}{m} t \geq \frac{a}{a+\varepsilon} (x-X) + \frac{1}{m} \inf(\kappa t) \end{aligned}$$

(pour $x \geq X$) l'infimum étant pris sur $\kappa \in [a,b]$. Et :

$$|\varphi''(\kappa)| \leq \varepsilon^2 \delta^{-\frac{3}{2}} x + \frac{1}{m} |t|$$

Le lemme 1 (Annexe 3) donne, pour $x \geq X$ et $\frac{a}{a+\varepsilon} (x-X) + \frac{1}{m} \inf(\kappa t) > 0$

$$|J_3(x,t)| \leq \left[\frac{a}{a+\varepsilon} (x-X) + \frac{1}{m} \inf(\kappa t) \right]^{-1} \cdot \left[\text{const} + \text{const} \frac{\varepsilon^2 \delta^{-\frac{3}{2}} x + \frac{1}{m} |t|}{\frac{a}{a+\varepsilon} (x-X) + \frac{1}{m} \inf(\kappa t)} \right]$$

Si $t \leq 0$, alors $\inf(\kappa t) = bt = -b|t|$ et on doit supposer

$$x - X > \frac{a+\varepsilon}{a} \frac{b}{m} |t| \text{ pour obtenir une estimation : } |J_3(x,t)| \leq \frac{c(t)}{x},$$

d'où suit que $J_3(\cdot, t) \in L^2(I)$ pour tout $t \leq 0$. Si $t > 0$ alors

$$\inf(\kappa t) = at = a|t| \text{ et } \frac{a}{a+\varepsilon} (x-X) + \frac{1}{m} \inf(\kappa t) = \frac{a}{a+\varepsilon} (x-X)$$

+ $\frac{a}{m} |t| > 0$ si $x \geq X$. Il suit que $J_3(\cdot, t) \in L^2(I) \forall t > 0$ et si $t \geq 1$ on a une estimation uniforme :

$$|J_3(x,t)| \leq \frac{c}{x-X}$$

pour $x \geq X$, avec c indépendant de t . Comme nous l'avons déjà vu, nous aurons $\lim_{t \rightarrow \infty} \|J_3(\cdot, t)\|_{L^2(I)} = 0$

f) Nous avons montré que $K_{\pm} e^{-iHt} f \in L^2(I) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
De plus, nous remarquons que $\tilde{K}_{\pm} e^{-iHt} f = J_3(\cdot, t)$, les autres affirmations suivent donc des calculs précédents.

QED

Dans la proposition suivante P_R est l'opérateur :

$$(P_R g)(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq R \\ 0 & \text{si } x > R \end{cases}$$

Proposition 11

1) Si $f \in L^2(I)$ est telle que $\mathcal{F}f$ est à variation bornée et à support compact dans I , alors pour tout $R < \infty$ nous avons :

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|P_R K_{\pm} e^{-iHt} f\|_{L^2(I)} = 0$$

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|P_R \tilde{K}_{\pm} e^{-iHt} f\|_{L^2(I)} = 0$$

2) Si $f \in L^2(I)$ est telle que $Pf = f$ (cf. paragraphe 4 pour P) et $\mathcal{F}f$ est bornée et à support compact dans I , alors $\forall R < \infty$:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|P_R e^{-iHt} f\|_{L^2(I)} = 0$$

Démonstration

1) On doit montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^R |(K_{\pm} e^{-iHt} f)(x)|^2 dx = 0$.
L'intégrand étant uniformément borné en t par $c \|\mathcal{F}f\|_{L^1(I)}$, on peut passer à la limite sans l'intégrale; d'autre part le lemme de Riemann-Lebesgue montre que : $\lim_{|t| \rightarrow \infty} (K_{\pm} e^{-iHt} f)(x) = 0 \quad \forall x$
De même pour $\tilde{K}_{\pm}$.

$$2) \quad \| P_R e^{-iHt} f \|_{L^2(I)}^2 = \int_0^R | (\tilde{e}^{-iHt} f)(x) |^2 dx = \\ = \int_0^R \left| \int_0^\infty \psi(x, \kappa) e^{-i \frac{\kappa^2}{2m} t} (\mathcal{F} f)(\kappa) d\kappa \right|^2 dx$$

Pour x quelconque appartenant à I :

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_0^\infty \psi(x, \kappa) e^{-i \frac{\kappa^2}{2m} t} (\mathcal{F} f)(\kappa) d\kappa = 0$$

(Riemann - Lebesgue). On applique le théorème de Lebesgue à l'aide de :

$$\left| \int_0^\infty \psi(x, \kappa) e^{-i \frac{\kappa^2}{2m} t} (\mathcal{F} f)(\kappa) d\kappa \right| \leq \int_0^\infty |\psi(x, \kappa)| \cdot |(\mathcal{F} f)(\kappa)| d\kappa \leq$$

$\leq$ constante indépendante de x

car $x \mapsto \psi(x, \kappa)$ est uniformément bornée lorsque κ parcourt un compact dans I (utiliser la forme asymptotique pour $x \rightarrow \infty$ et la continuité de $(x, \kappa) \mapsto \psi(x, \kappa)$ pour $x \in (0, X)$ par exemple)

QED

Nous aurons besoin plus tard du lemme suivant (où P_R , pour les valeurs $R = \frac{K_i}{m} |t|$ et $R = \frac{K_s}{m} |t|$, a la même signification que plus haut).

Lemme 5

Si $f \in L^2(I)$ est telle que $\overset{\circ}{\mathcal{F}} f$ est à variation bornée et à support compact dans I et si $[K_i, K_s] \subset (0, \infty)$ est tel que $\text{supp } \overset{\circ}{\mathcal{F}} f \subset \subset (K_i, K_s)$ alors :

$$\lim_{t \rightarrow \mp \infty} \| P_{\frac{K_i |t|}{m}} \mathcal{K}_\pm \tilde{e}^{-i\hat{H}t} f \| = \lim_{t \rightarrow \mp \infty} \| P_{\frac{K_i |t|}{m}} \tilde{\mathcal{K}}_\pm \tilde{e}^{-i\hat{H}t} f \| = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \mp \infty} \| (I - P_{\frac{K_s |t|}{m}}) \mathcal{K}_\pm \tilde{e}^{-i\hat{H}t} f \| = \lim_{t \rightarrow \mp \infty} \| (I - P_{\frac{K_s |t|}{m}}) \tilde{\mathcal{K}}_\pm \tilde{e}^{-i\hat{H}t} f \| = c$$

Démonstration

La proposition 10 montre qu'il suffit de considérer les deux limites de droite. Comme $\text{supp } \overset{\circ}{\mathcal{F}} f$ est un compact dans (K_i, K_s) , on peut trouver $[K_0, K_1]$ tel que $\text{supp } \overset{\circ}{\mathcal{F}} f \subset [K_0, K_1] \subset (K_i, K_s)$. Soit $X < \infty$ tel que $K \in [K_i, K_s] \Rightarrow X(K) \leq X$. La proposition 11 montre que $\|P_X \tilde{\mathcal{K}}_{\pm} e^{-i\hat{H}t} f\| \rightarrow 0$ donc par la suite on peut toujours considérer $x \geq X$ dans les estimations. Pour $x \geq X$ on introduit les fonctions :

$$g(\kappa) = \pm \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \exp \mp i \left(\int_{X(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2\omega V_L(\lambda)} d\lambda - \frac{0\pi}{2} \right) \cdot (\overset{\circ}{\mathcal{F}} f)(\kappa)$$

$$\varphi(\kappa) = \frac{\kappa^2}{2\omega} |t| - \int_X^x \sqrt{\kappa^2 - 2\omega V_L(\lambda)} d\lambda$$

(où $|t| = \mp t$ car nous considérons toujours $t \lesseqgtr 0$ pour $\mathcal{K}_{\pm}$)

Alors :

$$(\tilde{\mathcal{K}}_{\pm} e^{-i\hat{H}t} f)(x) \equiv J(x, t) = \int_{K_0}^{K_1} e^{\pm i\varphi(\kappa)} g(\kappa) d\kappa$$

On utilise le lemme 1 (Annexe 3) pour estimer la dernière intégrale. On a

$$\varphi'(\kappa) = \frac{\kappa}{\omega} |t| - \int_X^x \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 2\omega V_L(\lambda)}} d\lambda$$

a) Considérons d'abord la première limite, c'est-à-dire $\frac{mx}{|t|} \leq K_i$ et $x \geq X$ (on considère toujours $|t|$ suffisamment grand). Alors si $K \in [K_0, K_1]$:

$$\varphi'(\kappa) \geq \frac{K_0}{\omega} |t| - (x - X) \cdot \frac{1}{(x - X)} \int_X^x \left(1 - \frac{2\omega}{\kappa^2} V_L(\lambda) \right)^{-\frac{1}{2}} d\lambda$$

Comme :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - X} \int_X^x \left(1 - \frac{2\omega}{\kappa^2} V_L(\lambda) \right)^{-\frac{1}{2}} d\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2\omega}{\kappa^2} V_L(\lambda) \right)^{-\frac{1}{2}} =$$

uniformément en $K \in [K_0, K_1]$ on peut trouver $N > 0$ tel que

$$x \geq X + N \Rightarrow \frac{1}{x-X} \int_X^x \left(1 - \frac{2\omega}{K^2} V_L(\lambda)\right)^{-\frac{1}{2}} d\lambda \leq 1 + \varepsilon \quad \forall K \in [K_0, K_1]$$

où $\varepsilon > 0$ est donné. Alors $K \in [K_0, K_1]$ et $x \geq X + N \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \varphi'(K) &\geq \frac{K_0}{\omega} |t| - (x-X)(1+\varepsilon) \geq \frac{K_0}{\omega} |t| - x(1+\varepsilon) \geq \\ &\geq (K_0 - K_1(1+\varepsilon)) \frac{|t|}{\omega} \end{aligned}$$

Nous avons $K_0 > K_1$ et nous pouvons choisir ε t.q. $c_1 = \frac{K_0 - K_1(1+\varepsilon)}{\omega} > 0$. Alors : $x \geq X + N$ et $K \in [K_0, K_1] \Rightarrow \varphi'(K) \geq c_1 |t| > 0$

D'autre part :

$$\begin{aligned} |\varphi''(K)| &= \left| \frac{1}{\omega} |t| + \int_X^x \frac{2\omega V_L(\lambda)}{(K^2 - 2\omega V_L(\lambda))^{3/2}} d\lambda \right| \leq \frac{1}{\omega} |t| + \text{const}(x-X) \leq \\ &\leq c_2 |t| \quad ; \quad \forall K \in [K_0, K_1], \quad \forall x \geq X \end{aligned}$$

c_2 étant indépendante de (K, x, t) .

Le lemme 1 (Annexe 3) donne : $x \geq X + N \Rightarrow$:

$$|\gamma(x, t)| \leq \frac{c}{|t|} \quad c = \text{constante indépendante de } (x, t)$$

Pour $|t|$ suffisamment grand :

$$\left\| \mathcal{P}_{\frac{K_1|t|}{\omega}} \tilde{K}_t e^{-i\tilde{H}t} f \right\| \leq \left(\int_0^{x+N} |\gamma(x, t)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{x+N}^{\frac{K_1|t|}{\omega}} |\gamma(x, t)|^2 dx \right)^{1/2}$$

D'après la proposition 11, le premier terme $\rightarrow 0$ pour $|t| \rightarrow \infty$,

Le deuxième est majoré par :

$$\frac{c}{|t|} \left(\frac{K_1|t|}{\omega} - (x+N) \right)^{1/2} \leq \frac{c \sqrt{K_1}}{\sqrt{\omega}|t|} \rightarrow 0 \quad \text{pour } |t| \rightarrow \infty$$

b) Pour la deuxième limite, on a $\frac{mx}{|t|} \geq K_s$. Alors pour $x \geq X$ et $K \in [K_0, K_1]$ il vient

$$\varphi'(\kappa) \leq \frac{K_1}{\omega} |t| - x \cdot \frac{x-X}{x} \cdot \frac{1}{x-X} \int_x^x \left(1 - \frac{2\omega}{\kappa^2} V_L(s)\right)^{-\frac{1}{2}} ds$$

Comme on l'a fait plus haut, on montre que si $x - X$ est suffisamment grand, le facteur de x dans la dernière expression peut être rendu plus grand que $1 - \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ donné indépendamment de $K \in [K_0, K_1]$. D'autre part, $|t| \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow \infty$; donc si $|t|$ est suffisamment grand

$$\varphi'(\kappa) \leq \frac{K_1}{\omega} |t| - x(1-\varepsilon) \leq \left[\frac{K_1}{K_s} - 1 + \varepsilon\right] x$$

Mais $K_1 < K_s$, on peut donc prendre $\varepsilon > 0$ tel que $-c_1 = \frac{K_1}{K_s} - 1 + \varepsilon < 0$. Alors $\varphi'(\kappa) \leq -c_1 \cdot x < 0$ pour $|t|$ suffisamment grand. De plus :

$$|\varphi''(\kappa)| \leq \frac{1}{\omega} |t| + \text{const}(x-X) \leq c_2 x$$

Le lemme 1 de l'annexe 3 implique que $|J(x,t)| \leq \frac{c}{x}$ pour $|t|$ suffisamment grand et ainsi

$$\left(\int_{\frac{K_1|t|}{\omega}}^{\infty} |J(x,t)|^2 dx \right)^{1/2} \leq c \left(\int_{\frac{K_1|t|}{\omega}}^{\infty} x^{-2} dx \right)^{1/2} = c \sqrt{\frac{\omega}{K_1|t|}} \rightarrow 0$$

QED

Proposition 12

Supposons $K \rightarrow X(K)$ de classe C^2 et $f \in L^2(I)$ telle que $\overset{0}{\mathcal{F}}f$ soit de classe C^2 et à support compact dans I . Soient $[K_i, K_s] \subset (0, \infty)$ tel que $\text{supp } \overset{0}{\mathcal{F}}f \subset (K_i, K_s)$ et $\varepsilon > 0$ tel que $K_i - \varepsilon > 0$. Alors si X est suffisamment grand et si $K_i \leq m \frac{x}{|t|} \leq K_s$, l'équation :

$$|t| = \int_x^{\infty} \left(\frac{2}{u} \left(\frac{\kappa^2}{2u} - V_L(x) \right) \right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

a une solution unique $K = K(x, t) \in (K_i - \varepsilon, K_s + \varepsilon)$ pour tout $|t|$ suffisamment grand. Nous avons :

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \left(K(x, t) - u \frac{x}{|t|} \right) = 0$$

c'est-à-dire: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T < \infty \quad \forall |t| \geq T \quad \forall x \in [u^{-1} \kappa_i |t|, u^{-1} \kappa_s |t|] :$

$$|K(x, t) - u \frac{x}{|t|}| < \varepsilon$$

On note $\chi(K_i \leq u \frac{x}{|t|} \leq K_s)$ la fonction (de la variable x) caractéristique de l'intervalle $[u^{-1} \kappa_i |t|, u^{-1} \kappa_s |t|]$ et on associe à f la fonction (pour $|t|$ suffisamment grand)

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_t f)(x) &= \pm i \chi \left(\kappa_i \leq u \frac{x}{|t|} \leq \kappa_s \right) \left[\int_x^{\infty} 2u V_L(x) (\kappa^2 - 2u V_L(x))^{-\frac{3}{2}} dx + \frac{|t|}{u} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \exp \pm i \left(\int_{x(\kappa)}^x (\kappa^2 - 2u V_L(x))^{1/2} dx \pm \frac{\kappa^2}{2u} t - \frac{e\bar{t}}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot (\overset{\circ}{\mathcal{F}} f)(\kappa) \end{aligned}$$

où : $\kappa = K(x, t)$.

Alors :

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \| \mathcal{K}_{\pm} e^{-i\hat{H}t} f - \mathcal{C}_{\pm} f \|_{L^2(I)} = 0$$

Démonstration

Vu le lemme 5 et la proposition 10 il suffit de montrer :

$$\| (P_{\frac{\kappa_s |t|}{u}} - P_{\frac{\kappa_i |t|}{u}}) (\tilde{\mathcal{K}}_{\pm} e^{-i\hat{H}t} f - \mathcal{C}_{\pm} f) \| \rightarrow 0$$

Nous avons :

$$\mathcal{J}(x, t) \equiv (\tilde{\mathcal{K}}_{\pm} e^{-i\hat{H}t} f)(x) = \pm \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\kappa_0}^{\kappa_1} \exp \pm i \left(\frac{\kappa^2}{2u} |t| - \int_{x(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2u V_L(\lambda)} d\lambda + \frac{e\bar{t}}{2} \right) \cdot (\overset{\circ}{\mathcal{F}} f)(\kappa) d\kappa$$

où $\text{supp } \overset{0}{\mathcal{F}} f \subset (K_0, K_1)$ et $[K_0, K_1] \subset (K_i, K_s)$.

Nous allons estimer le comportement asymptotique de $\mathcal{J}(x, t)$ pour $m^{-1} K_i |t| \leq x \leq m^{-1} K_s |t|$ à l'aide du lemme 2 (Annexe 3)

Soit $X > 0$ tel que :

$$I) \quad K_i - \varepsilon \leq \kappa \leq K_s + \varepsilon \Rightarrow X \geq X(\kappa)$$

$$II) \quad c = \omega' (1 - K_s \delta^{-3/2} 2\omega \sup_{\lambda \geq X} |V_L(\lambda)|) > 0$$

(pour la signification de δ voir le début de ce paragraphe; la deuxième condition n'est pas nécessaire, mais elle simplifie les calculs).

On note :

$$g(\kappa) = \pm \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \exp \pm i \left(- \int_{X(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2\omega V_L(\lambda)} d\lambda + \frac{e\pi}{2} \right) \cdot (\overset{0}{\mathcal{F}} f)(\kappa)$$

$$\varphi(\kappa) = \frac{\kappa^2}{2\omega} |t| - \int_x^x \sqrt{\kappa^2 - 2\omega V_L(\lambda)} d\lambda$$

donc :

$$\mathcal{J}(x, t) = \int_{K_i - \varepsilon}^{K_s + \varepsilon} e^{\pm i \varphi(\kappa)} g(\kappa) d\kappa$$

et $g \in C^2([K_i - \varepsilon, K_s + \varepsilon])$, $\text{supp } g \subset (K_i - \varepsilon, K_s + \varepsilon)$; $\varphi \in C^\infty([K_i - \varepsilon, K_s + \varepsilon])$

Nous avons :

$$\varphi'(\kappa) = \frac{\kappa}{\omega} |t| - \int_x^x \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 2\omega V_L(\lambda)}} d\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow |t| = \omega \int_x^x (\kappa^2 - 2\omega V_L(\lambda))^{-1/2} d\lambda$$

Si $x \geq X$ et $K \in (K_i - \varepsilon, K_s + \varepsilon)$ le membre de droite de cette équation est bien défini et sa dérivée par rapport à K est

$$- \omega \int_x^x \kappa (\kappa^2 - 2\omega V_L(\lambda))^{-3/2} d\lambda < 0$$

Donc le membre de droite de l'équation est une fonction strictement décroissante de K ; en particulier, si une solution existe elle est unique et la condition nécessaire et suffisante pour avoir une solution $K \in (K_i - \epsilon, K_s + \epsilon)$ est :

$$(3) \quad u \int_x^{\infty} \left((K_s + \epsilon)^2 - 2u V_L(\kappa) \right)^{-\frac{1}{2}} d\kappa < |t| < u \int_x^{\infty} \left((K_i - \epsilon)^2 - 2u V_L(\kappa) \right)^{-\frac{1}{2}} d\kappa$$

Mais :

$$u \int_x^{\infty} \left((K_s + \epsilon)^2 - 2u V_L(\kappa) \right)^{-\frac{1}{2}} d\kappa = \frac{u x}{|t|} \cdot \frac{1}{x} \int_x^{\infty} \left((K_s + \epsilon)^2 - 2u V_L(\kappa) \right)^{-\frac{1}{2}} d\kappa \cdot |t|$$

Le premier facteur est majoré par K_s ; le deuxième converge vers $(K_s + \epsilon)^{-1}$ pour $x \rightarrow \infty$ donc on peut le faire $\leq (K_s + \epsilon)^{-1} + \eta$ pour un $\eta > 0$ donné et tout x suffisamment grand. Alors l'expression précédente est majorée par :

$$K_s \left((K_s + \epsilon)^{-1} + \eta \right) |t| = \left(\frac{K_s}{K_s + \epsilon} + K_s \eta \right) |t|$$

On prend $\eta > 0$ tel que $\frac{K_s}{K_s + \epsilon} + K_s \eta < 1$. Il suit que la première inégalité de (3) est vérifiée si $\frac{mx}{|t|} \leq K_s$ et x est suffisamment grand. De même on voit que $\frac{mx}{|t|} \geq K_i$ implique la deuxième inégalité pour x suffisamment grand. L'existence et l'unicité de la solution $K(x, t) \equiv \tilde{K} \in (K_i - \epsilon, K_s + \epsilon)$ sont démontrées. Nous aurons de plus :

$$\begin{aligned} K(x, t) - u \frac{x}{|t|} &= \frac{u}{|t|} \int_x^{\infty} \left(1 - \frac{2u}{K^2} V_L(\kappa) \right)^{-\frac{1}{2}} d\kappa - \frac{u x}{|t|} = \\ &= \frac{u x}{|t|} \left[\frac{1}{x} \int_x^{\infty} \left(1 - \frac{2u}{K^2} V_L(\kappa) \right)^{-\frac{1}{2}} d\kappa - 1 \right] \end{aligned}$$

Le premier facteur est borné par K_s et on voit facilement que la parenthèse converge vers 0 pour $x \rightarrow \infty$. Donc la première partie de la proposition est démontrée.

Il suit que φ' s'annule en un point unique $\tilde{K} \in (K_i - \varepsilon, K_s + \varepsilon)$ (on considère toujours dans la suite $|t|$ suffisamment grand)
D'autre part :

$$\begin{aligned}\varphi''(K) &= \frac{1}{u} |t| + \int_X 2u V_L(x) (K^2 - 2u V_L(x))^{-\frac{3}{2}} dx \geq \\ &\geq \frac{1}{u} |t| - (x - x) \delta^{-\frac{3}{2}} 2u \sup_{x \geq x} |V_L(x)| \geq \\ &\geq \frac{1}{u} |t| - \frac{1}{u} K_\lambda |t| \delta^{-\frac{3}{2}} 2u \sup_{x \geq x} |V_L(x)| = \\ &= c |t| > 0\end{aligned}$$

Les conditions du lemme 2 de l'annexe 3 sont vérifiées; nous allons calculer $u_{\varepsilon/2, \varphi'}$, $u_{\varepsilon/2, \varphi''}$ (cf. le lemme). D'abord $u_{\varepsilon/2, \varphi''} \geq \inf \varphi''(K) \geq c |t|$; d'autre part si $K - \tilde{K} \geq \pm \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\begin{aligned}\varphi'(K) &= \varphi'(K) - \varphi'(\tilde{K}) = \frac{K - \tilde{K}}{u} |t| + \int_X \left[\left(1 - \frac{2u}{K^2} V_L(x)\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{2u}{\tilde{K}^2} V_L(x)\right)^{-\frac{1}{2}} \right] dx \\ &\geq \pm \frac{\varepsilon}{2u} |t| + x \cdot \frac{1}{x} \int_X \left[\left(1 - \frac{2u}{K^2} V_L(x)\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{2u}{\tilde{K}^2} V_L(x)\right)^{-\frac{1}{2}} \right] dx\end{aligned}$$

Il est clair que le facteur de x converge vers 0 pour $x \rightarrow \infty$ uniformément en $K \in [K_i - \varepsilon, K_s + \varepsilon]$; on peut donc le faire $\geq \mp \mu$ pour un $\mu > 0$ donné; alors pour $|t|$ grand :

$$\begin{aligned}\varphi'(K) &\geq \pm \frac{\varepsilon}{2u} |t| \mp \mu x \geq \pm \frac{\varepsilon}{2u} |t| \mp \mu \frac{K_\lambda}{u} |t| = \\ &= \pm \frac{1}{u} \left(\frac{\varepsilon}{2} - \mu K_\lambda \right) |t|\end{aligned}$$

On prend μ tel que $c' = \frac{1}{u} \left(\frac{\varepsilon}{2} - \mu K_\lambda \right) > 0$. Il suit que $u_{\varepsilon/2, \varphi'} \geq c' |t|$ ($|t|$ grand).

On obtient facilement $M_{\varphi^{(i)}} \leq \text{const } |t|$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.
Le lemme 2 de l'Annexe 3 implique :

$$\gamma(x,t) = \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi'(\tilde{x})}} g(\tilde{x}) e^{\pm i(\varphi(\tilde{x}) + \frac{\pi}{4})} + R(x,t)$$

et : $|R(x,t)| \leq \frac{\text{const.}}{|t|}$

Donc : $\left(\int_{\omega' K_1 |t|}^{\omega' K_2 |t|} |R(x,t)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{\text{const.}}{\sqrt{|t|}} \rightarrow 0$

QED

Remarques

1) D'après Landau - Lifschitz (1) (formule 14.6) la solution $\frac{K(\mathbf{x},t)^2}{2m} = E(\mathbf{x},t)$ de l'équation

$$|t| = \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}} \left(\frac{2}{m} (E - V_L(x)) \right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

représente l'énergie d'une particule classique en mouvement dans le champ de potentiel V_L , qui, à un moment cinétique total $M = 0$, a besoin du temps $|t|$ pour aller d'un point situé à la distance $\mathbf{x}$ de l'origine à un point situé à distance $\mathbf{x}$ de l'origine.

2) Si on suppose $K \rightarrow \mathbf{x}(K)$ de classe C^4 et V_L de classe C^3 on peut démontrer la proposition précédente en remplaçant la constante $\mathbf{x}$ par $\mathbf{x}(K)$. On fait les calculs en prenant

$$\varphi(K) = \frac{K^2}{2m} |t| - \int_{\mathbf{x}(K)}^{\mathbf{x}} \sqrt{K^2 - 2m V_L(x)} dx$$

(alors φ'' , φ''' , $\varphi^{(4)}$ contiennent V_L' , V_L'' , V_L''').

On remarque que dans ce cas la position initiale $X(k)$ de la particule classique (cf. remarque précédente) dépend de son énergie $E = \frac{K^2}{2m}$.

Si les hypothèses de la proposition 9 sont vérifiées, il sera plus utile par la suite de travailler avec $X'_\pm$ $\tilde{X}'_\pm$ opérateurs modifiés ^{par rapport à} ceux introduits plus haut. Remarquons d'abord que l'on peut toujours considérer $X_0 = 0$ ^{dans} la proposition 9, en définissant $V_L(x) = 0$ pour $x \leq X_0$.

Nous allons donc supposer (en dehors des hypothèses du début du paragraphe 4)

a) $V_L \in L^\infty(I)$

b) Pour un $N \geq 2$: $\int_0^\infty |V_L(x)|^N dx < \infty$

(c'est-à-dire $V_L \in L^\infty(I) \cap L^N(I)$)

On prend $X = 0$ dans la proposition 9. Donc, avec :

$$C_n = \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(1-\frac{1}{2}\right) \dots \left(n-1-\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad E = E(K) = \frac{K^2}{2m}$$

nous aurons :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\psi(x, K) - \sqrt{\frac{2}{K}} \sin \left(Kx + \sum_{n=1}^{N-1} C_n \frac{K}{E^n} \int_0^x V_L^n(s) ds + \delta'(K) - \frac{e\pi}{2} \right) \right] = 0$$

uniformément lorsque K parcourt des compacts dans $(0, \infty)$
 (les déphasages $\delta'(K)$ qui apparaissent ici sont différents de ceux du début de ce paragraphe; mais ce qui est important, c'est que leur différence, qui est une fonction de K , ne dépend pas de e ;
 nous sommes donc en accord avec l'indétermination des opérateurs d'onde selon la théorie algébrique, lorsque l'on prend comme

algèbre d'observables libres $\mathcal{A} = \left\{ -\frac{\Delta}{2m} \right\}'$).

Sous les conditions précédentes sur V_L on définit pour $f \in L^2(I)$ telle que $\overset{\circ}{\mathcal{F}} f \in L^1(I)$:

$$\varphi_H(x, \kappa) = - \sum_{n=1}^{N-1} c_n \frac{\kappa}{E^n} \int_0^x V_L^n(\chi) d\chi$$

$$(\mathcal{K}'_{\pm} f)(x) = \int_0^{\infty} e^{\pm i \varphi_H(x, \kappa)} \overset{\circ}{\varphi}(x, \kappa) (\overset{\circ}{\mathcal{F}} f)(\kappa) d\kappa$$

$$(\tilde{\mathcal{K}}'_{\pm} f)(x) = \pm \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{\pm i (\varphi_H(x, \kappa) - x\kappa + \frac{E\kappa}{2})} (\overset{\circ}{\mathcal{F}} f)(\kappa) d\kappa$$

Les propositions démontrées pour $\mathcal{K}_{\pm}, \tilde{\mathcal{K}}_{\pm}$ restent valables pour $\mathcal{K}'_{\pm}, \tilde{\mathcal{K}}'_{\pm}$; nous les énoncerons mais nous ne donnerons que quelques indications pour les démonstrations (car elles sont presque identiques à celles que nous avons déjà fait).

Proposition 10'

Si $f \in L^2(I)$ est telle que $\overset{\circ}{\mathcal{F}} f$ est à variation bornée et à support compact dans I alors :

$$1) \quad \mathcal{K}'_{\pm} e^{-i\hat{H}t} f \in L^2(I) \quad ; \quad \tilde{\mathcal{K}}'_{\pm} e^{-i\hat{H}t} f \in L^2(I) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

$$2) \quad s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp \infty} (\mathcal{K}'_{\pm} - \tilde{\mathcal{K}}'_{\pm}) e^{-i\hat{H}t} f = 0$$

$$3) \quad s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \tilde{\mathcal{K}}'_{\pm} e^{-i\hat{H}t} f = 0$$

Démonstration

Comme dans la proposition 10 nous avons :

$$(\mathcal{K}'_{\pm} e^{-i\hat{H}t} f)(x) = J_1(x, t) + \int_0^{\infty} e^{\pm i (\varphi_H(x, \kappa) \mp \frac{E\kappa}{2} t)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(\kappa x - \frac{E\kappa}{2} t) (\overset{\circ}{\mathcal{F}} f)(\kappa) d\kappa$$

où $J_1(\cdot, t) \in L^2(I)$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) et $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|J_1(\cdot, t)\|_{L^2(I)} = 0$. Le deuxième

terme est :

$$-\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{\pm i(\varphi_H(x, \kappa) \pm \kappa x \mp \frac{e\pi}{2} \mp \frac{\kappa^2}{2u} t)} \left(\frac{\circ}{\mp} f\right)(\kappa) d\kappa +$$

$$+\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{\pm i(\varphi_H(x, \kappa) \mp \kappa x \pm \frac{e\pi}{2} \pm \frac{\kappa^2}{2u} t)} \left(\frac{\circ}{\mp} f\right)(\kappa) d\kappa$$

Donc, par exemple :

$$(\mathcal{H}'_+ e^{-i\hat{H}t} f)(x) = J_1(x, t) - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i(\varphi_H(x, \kappa) + \kappa x - \frac{e\pi}{2} - \frac{\kappa^2}{2u} t)} \left(\frac{\circ}{\mp} f\right)(\kappa) d\kappa$$

$$+ (\tilde{\mathcal{H}}'_+ e^{-i\hat{H}t} f)(x)$$

Pour le deuxième terme on utilise :

$$\frac{d}{d\kappa} \left(\varphi_H(x, \kappa) + \kappa x - \frac{\kappa^2 t}{2u} \right) = x + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(2n-1)c_n}{E^n} \int_0^x V_L^n(\lambda) d\lambda - \frac{\kappa}{u} t =$$

$$= x \left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(2n-1)c_n}{E^n} \cdot \frac{1}{x} \int_0^x V_L^n(\lambda) d\lambda \right) - \frac{\kappa t}{u} \geq x(1-\varepsilon) - \frac{\kappa}{u} t$$

car pour $N \geq 1$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x V_L^n(\lambda) d\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} V_L^n(\lambda) = 0$; on considère

x suffisamment grand. On peut continuer comme dans la proposition 10. Pour le troisième terme on raisonnera de la même manière

QED

Proposition 11'

Si l'on a une fonction f identique à celle de la proposition 10' et $R < \infty$ alors

$$s - \lim_{|t| \rightarrow \infty} P_R \mathcal{H}'_\pm e^{-i\hat{H}t} f = 0$$

$$s - \lim_{|t| \rightarrow \infty} P_R \tilde{\mathcal{H}}'_\pm e^{-i\hat{H}t} f = 0$$

Lemme 5'

Si $f \in L^2(I)$ est telle que $\overset{0}{\mathcal{F}} f$ est à variation bornée et à support compact dans (K_i, K_s) , où $[K_i, K_s] \subset (0, \infty)$, alors :

$$\lim_{t \rightarrow \mp \infty} \frac{P_{K_i|t|}}{\omega} \mathcal{H}'_{\pm} e^{-i\dot{H}t} f = \lim_{t \rightarrow \mp \infty} \frac{P_{K_s|t|}}{\omega} \tilde{\mathcal{H}}'_{\pm} e^{-i\dot{H}t} f = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \mp \infty} (1 - \frac{P_{K_s|t|}}{\omega}) \mathcal{H}'_{\pm} e^{-i\dot{H}t} f = \lim_{t \rightarrow \mp \infty} (1 - \frac{P_{K_i|t|}}{\omega}) \tilde{\mathcal{H}}'_{\pm} e^{-i\dot{H}t} f = 0$$

Démonstration

Il suffit de considérer les limites du membre de droite. Alors :

$$(\tilde{\mathcal{H}}'_{\pm} e^{-i\dot{H}t} f)(x) = \pm \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{\pm i(\varphi_H(x, \kappa) - \kappa x + \frac{\kappa^2}{2\omega}|t|)} e^{\pm i \frac{\varphi_0}{2}} (\overset{0}{\mathcal{F}} f)(\kappa) d\kappa$$

(car $t \lesseqgtr 0$). Alors :

$$\begin{aligned} \varphi'(\kappa) &\equiv \frac{d}{d\kappa} (\varphi_H(x, \kappa) - \kappa x + \frac{\kappa^2}{2\omega}|t|) = \frac{\kappa}{\omega}|t| - x \left(1 - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2u_n \kappa u_n}{E^n} \cdot \frac{1}{x} \int_0^x V_L^n(s) ds \right) \\ &\geq \frac{\kappa}{\omega}|t| - x(1 \pm \varepsilon) \end{aligned}$$

(pour x suffisamment grand)

Si $x \leq \frac{K_i|t|}{m}$ (resp $x \geq \frac{K_s|t|}{m}$) et $\kappa \in [K_0, K_1]$ (où $\text{supp } \overset{0}{\mathcal{F}} f \subset [K_0, K_1]$ et $[K_0, K_1] \subset (K_i, K_s)$) alors :

$$\varphi'(\kappa) \geq \frac{K_0}{\omega}|t| - \frac{K_i}{\omega}(1+\varepsilon)|t| = \frac{K_0 - K_i(1+\varepsilon)}{\omega}|t| > 0$$

$$\text{(resp. } \varphi'(\kappa) \leq \frac{K_1}{\omega}|t| - \frac{K_s}{\omega}(1-\varepsilon)|t| = \frac{K_1 - K_s(1-\varepsilon)}{\omega}|t| < 0)$$

si on prend ε suffisamment petit. On poursuit comme dans le lemme 5

QED

Proposition 12'

Soit $f \in L^2(I)$ telle que $\overset{0}{\mathcal{F}} f$ est de classe C^2 et à support compact dans (K_i, K_s) , où $[K_i, K_s] \subset (0, \infty)$

Soient $\varepsilon \in (0, K_i)$ et x, t tels que $K_i \leq m \frac{x}{|t|} \leq K_s$; alors pour tout $|t|$ suffisamment grand l'équation :

$$x = \frac{\kappa}{m} |t| + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(2n-1) c_n}{E^n} \int_0^x v_L^n(\kappa) d\kappa$$

a une solution unique $K' = K'(x, t) \in (K_i - \varepsilon, K_s + \varepsilon)$ et :

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} (K'(x, t) - m \frac{x}{|t|}) = 0$$

On note $x \mapsto \chi(K_i \leq \frac{mx}{|t|} \leq K_s)$ la fonction caractéristique de $[m^{-1} K_i |t|, m^{-1} K_s |t|]$ et on définit :

$$(\mathcal{E}'_t f)(x) = \pm i \frac{\chi(K_i \leq \frac{mx}{|t|} \leq K_s) e^{\pm i [E'(x, t) |t| - K'(x, t) x + \varphi_N(x, K'(x, t)) + \frac{(2\varepsilon+1)\pi}{4}]}}{\left[\frac{|t|}{m} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2n(2n-1) c_n}{K'(x, t) \cdot E'^n(x, t)} \int_0^x v_L^n(\kappa) d\kappa \right]^{1/2}} (\overset{0}{\mathcal{F}} f)(K'(x, t))$$

Alors :

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (K'_t e^{-i\hat{H}t} f - \mathcal{E}'_t f) = 0$$

Démonstration

Il suffit que

$$\| (\mathcal{P}_{\frac{K_s |t|}{m}} - \mathcal{P}_{\frac{K_i |t|}{m}}) (K'_t e^{-i\hat{H}t} f - \mathcal{E}'_t f) \|_{L^2(I)} \rightarrow 0$$

Nous avons :

$$\left(\tilde{K}'_{\pm} e^{-i\hat{H}t} f \right)(x) = \pm \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{\pm i(\varphi_H(x, \kappa) - x\kappa + \frac{\kappa^2}{2u} |t|)} e^{\pm i \frac{\theta}{2}} \left(\frac{e}{f} \right)(\kappa) d\kappa$$

et nous en cherchons le comportement pour $t \rightarrow \pm\infty$ et $K_i \leq \frac{mx}{|t|} \leq K_s$
Soit :

$$\varphi(\kappa) = \varphi_H(x, \kappa) - x\kappa + \frac{\kappa^2}{2u} |t|$$

Alors :

$$\varphi'(\kappa) = \frac{\kappa}{u} |t| - x + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(2n-1)c_n}{E^n} \int_0^x V_L^n(x) dx$$

Donc :

$$\varphi'(\kappa) = 0 \Leftrightarrow \frac{u x}{|t|} = \kappa + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(2n-1)c_n u}{E^n} \frac{1}{|t|} \int_0^x V_L^n(x) dx$$

Nous avons :

$$\frac{1}{|t|} \int_0^x V_L^n(x) dx = \frac{x}{|t|} \cdot \frac{1}{x} \int_0^x V_L^n(x) dx$$

Alors en dérivant le membre de droite de l'équation précédente par rapport à κ , on voit que pour les grandes valeurs de $|t|$ la dérivée est positive, c'est-à-dire le membre de droite est une fonction strictement croissante de κ ; la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation ait une solution dans $(K_i - \varepsilon, K_s + \varepsilon)$ est donc :

$$K_i - \varepsilon + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(2n-1)c_n u}{\left(\frac{K_i - \varepsilon}{2u}\right)^n} \frac{1}{|t|} \int_0^x V_L^n(x) dx < \frac{u x}{|t|} < K_s + \varepsilon + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(2n-1)c_n u}{\left(\frac{K_s + \varepsilon}{2u}\right)^n} \frac{1}{|t|} \int_0^x V_L^n(x) dx$$

Les sommes devenant petites pour $|t| \rightarrow \infty$, la première partie de la proposition est démontrée.

Nous avons :

$$\varphi''(\kappa) = \frac{1}{u} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2n(2n-1)c_n}{\kappa E^n} \int_0^x V_L^n(x) dx \geq c|t| > 0$$

pour $|t|$ suffisamment grand. On peut donc appliquer le lemme 2 (Annexe 3) comme dans la proposition 12.

QED

6. Les opérateurs d'onde

Nous gardons les hypothèses et notations du paragraphe 4; la fonction $K \mapsto X(K)$ est choisie comme au paragraphe 5; les déphasages $\delta(K)$ sont alors uniquement déterminés mod 2π indépendamment de K par la condition qui veut que $K \mapsto \delta(K)$ soit continue. On peut donc définir :

$$f \in L^2(I) \Rightarrow (\Omega_{\pm} f)(x) = \int_0^{\infty} e^{\pm i\delta(\kappa)} \psi(x, \kappa) (\mathcal{F}f)(\kappa) d\kappa$$

Si on note $e^{\pm i\delta}$ les opérateurs de multiplication par les fonctions $K \mapsto e^{\pm i\delta(K)}$ dans $L^2((0, \infty))$, on a :

$$\Omega_{\pm} = \mathcal{F}^* e^{\pm i\delta} \mathcal{F}$$

Il suit que les opérateurs $\Omega_{\pm} : L^2(I) \rightarrow PL^2(I)$ sont unitaires et :

$$e^{-iHt} \Omega_{\pm} = \Omega_{\pm} e^{-iHt} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Proposition 13

Si $f \in L^2(I)$ est telle que $\mathcal{F}f$ est à variation bornée et à support compact dans I , alors :

$$\Omega_{\pm} f = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{iHt} \chi_{\pm} e^{-iHt} f$$

Démonstration

On doit montrer que $\lim_{t \rightarrow \mp \infty} \|(\Omega_{\pm} - \chi_{\pm}) e^{-iHt} f\| = 0$.

Comme $\mathcal{F} \Omega_{\pm} f = e^{\pm i\delta} \mathcal{F}f$, il suit que $\mathcal{F} \Omega_{\pm} f$ est une fonction bornée à support compact dans I . Vu la proposition 11 il suffit de

montrer que $\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} \|(\mathcal{I} - P_R) (\Omega_{\pm} - \chi_{\pm}) e^{-iHt} f\| = 0$.

D'après la proposition 10 il suffit que $\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} \|(\mathcal{I} - P_R) \cdot (\Omega_{\pm} - \tilde{\chi}_{\pm}) e^{-iHt} f\| = 0$.

Dans la suite on considère seulement le cas $t \rightarrow -\infty$. Alors :

$$\begin{aligned}
 ((\Omega_+ - \tilde{X}_+) e^{-i\dot{H}t} f)(x) &= \int_0^\infty e^{i\delta(\kappa)} \left[\psi(x, \kappa) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left(\int_{x(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(s)} ds + \delta(\kappa) - \frac{e\hbar}{2} \right) \right] e^{-\frac{i\kappa^2}{2m}t} \left(\frac{\circ}{\mp} f \right)(\kappa) d\kappa \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \int_0^\infty e^{i\delta(\kappa)} \exp i \left(\int_{x(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(s)} ds + \delta(\kappa) - \frac{e\hbar}{2} \right) \cdot e^{-\frac{i\kappa^2}{2m}t} \left(\frac{\circ}{\mp} f \right)(\kappa) d\kappa - \\
 &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \int_0^\infty e^{i\delta(\kappa)} \exp -i \left(\int_{x(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(s)} ds + \delta(\kappa) - \frac{e\hbar}{2} \right) \cdot e^{-\frac{i\kappa^2}{2m}t} \left(\frac{\circ}{\mp} f \right)(\kappa) d\kappa \\
 &- \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp -i \left(\int_{x(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(s)} ds - \frac{e\hbar}{2} \right) \cdot e^{-\frac{i\kappa^2}{2m}t} \left(\frac{\circ}{\mp} f \right)(\kappa) d\kappa = \\
 &= \int_0^\infty \left[\psi(x, \kappa) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left(\int_{x(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(s)} ds + \delta(\kappa) - \frac{e\hbar}{2} \right) \right] e^{\frac{i\kappa^2}{2m}|t|} e^{i\delta(\kappa)} \left(\frac{\circ}{\mp} f \right)(\kappa) d\kappa \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \int_0^\infty \exp i \left(\int_{x(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(s)} ds + \frac{\kappa^2}{2m}|t| \right) \cdot e^{i(2\delta(\kappa) - \frac{e\hbar}{2})} \left(\frac{\circ}{\mp} f \right)(\kappa) d\kappa
 \end{aligned}$$

On note $J_1(x, t)$, resp. $J_2(x, t)$, les deux termes de cette expression. Nous avons vu qu'il suffit de montrer :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{t \leq 0} \int_R^\infty |J_\kappa(x, t)|^2 dx = 0 \quad (\kappa = 1, 2)$$

Remarquons d'abord qu'une partie des difficultés que nous rencontrerons sont dues au fait que l'on ne peut rien dire en général sur la fonction $K \mapsto \delta(K)$ (même si $V_L = 0$); si l'on savait que $K \mapsto \delta(K)$ est à variation finie, alors on pourrait montrer que $J_2(x, t) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ uniformément en t (la phase de $J_2(x, t)$ n'étant jamais stationnaire, on pourrait utiliser le lemme 1, Annexe 3, exactement comme dans la démonstration de la proposition 10) ce qui impliquerait la relation précédente pour $j = 2$.

a) Soit $\varepsilon > 0$ tel que $K \in \text{supp } \overset{\circ}{\mathcal{F}} f \Rightarrow K > \varepsilon$, et soit $X < \infty$

tel que, si $K \geq \epsilon$ et $K \leq \sup \{ K | K \in \text{supp } \overset{\circ}{f} \}$, alors $X(K) \leq X$ et de plus : $x \geq X \Rightarrow \epsilon^2 - 2m |V_L(x)| \geq \delta$ pour un $\delta > 0$ fixé.

Nous pouvons introduire les fonctions de Jost $f(\cdot, \mp K)$ pour des valeurs $K \geq \epsilon$ associées à X ; on définit :

$$\tilde{f}(\cdot, \mp K) = \exp\left(\pm i \int_{X(K)}^x \sqrt{K^2 - 2m V_L(\lambda)} d\lambda\right) f(\cdot, \mp K)$$

Alors les fonctions $\tilde{f}(\cdot, \mp K)$ sont solutions de $-f^{(2)} + \mu f = K^2 f$ et ont le comportement asymptotique suivant :

$$\tilde{f}(x, \mp K) \sim \exp(\pm i \tilde{\varphi}(x, K)) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty$$

où :

$$\tilde{\varphi}(x, K) = \int_{X(K)}^x \sqrt{K^2 - 2m V_L(\lambda)} d\lambda$$

Il est clair que

$$\psi(\cdot, K) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\delta(K) - \frac{p}{2}\pi)} \tilde{f}(\cdot, -K)$$

Dans la suite nous allons toujours considérer $x \geq X$; on pose :

$$\overset{\circ}{f}(x, \mp K) = e^{\pm i \tilde{\varphi}(x, K)}$$

Alors les fonctions $\overset{\circ}{f}(\cdot, \mp K)$ sont absolument continues, dérivables à droite en chaque $x \in (X, \infty)$, et

$$\overset{\circ}{f}^+(\cdot, \mp K) = \pm i \tilde{\varphi}^+(\cdot, K) \overset{\circ}{f}(\cdot, \mp K)$$

est à variation finie et engendre la mesure :

$$\overset{\circ}{f}^{(2)}(\cdot, \mp K) = \pm i \tilde{\varphi}^{(2)}(\cdot, K) \overset{\circ}{f}(\cdot, \mp K) - \tilde{\varphi}^{+2}(\cdot, K) \overset{\circ}{f}(\cdot, \mp K)$$

Comme $\tilde{\varphi}^{+2}(x, K) = K^2 - 2m V_L(x + o) = K^2 - 2m V_L(x)$ presque partout, il suit que $\overset{\circ}{f}(\cdot, \mp K)$ est solution de l'équation :

$$-\overset{\circ}{f}^{(2)}(\cdot, \mp K) + (2m V_L - K^2) \overset{\circ}{f}(\cdot, \mp K) = \mp i \tilde{\varphi}^{(2)}(\cdot, K) \overset{\circ}{f}(\cdot, \mp K)$$

Si on note μ_s la mesure à variation bornée sur (X, ∞) :

$$\mu_s(dx) = \mu(dx) - 2u V_L(x)dx = \frac{e(e+1)}{x^2} dx + 2u V_S(dx)$$

il suit que $\overset{\circ}{f}(\cdot, \mp K)$ est solution sur (X, ∞) de l'équation

$$-\overset{\circ}{f}^{(2)}(\cdot, \mp K) + (\mu - K^2) \overset{\circ}{f}(\cdot, \mp K) = [\mu_s \mp i \tilde{\varphi}^{(2)}(\cdot, K)] \overset{\circ}{f}(\cdot, \mp K)$$

Soient u_K, v_K les solutions de $-f^{(2)} + (\mu - K^2) f = 0$ sur (X, ∞) données par :

$$u_K(x) = 1 \quad ; \quad u_K^+(x) = 0$$

$$v_K(x) = 0 \quad ; \quad v_K^+(x) = 1$$

En utilisant la méthode des approximations successives (propositions 5, 6 de l'Annexe 1), on montre facilement que $[X, \infty) \times \mathbb{C} \ni (x, K) \mapsto u_K(x)$ est continue et $\forall x \in [X, \infty) : \mathbb{C} \ni K \mapsto u_K(x)$ est entière; de même pour v_K (et pour les dérivées u_K^+, v_K^+ en ce qui concerne la deuxième affirmation). D'autre part les fonctions $(X, \infty) \ni x \mapsto (u_K(x), v_K(x))$ sont bornées uniformément en K lorsque K parcourt des compacts dans $[\varepsilon, \infty)$: on peut écrire par exemple $u_K = \alpha(K) f(\cdot, -K) + \beta(K) f(\cdot, +K)$ (cf. proposition 6 point 5)) avec $K \mapsto (\alpha(K), \beta(K))$ continue et utiliser la proposition 6 point 4).

Si on tient compte du fait que $W(u_K, v_K) = 1$, que les fonctions $\overset{\circ}{f}(\cdot, \mp K)$ sont bornées, que u_K, v_K le sont aussi, que la mesure $\mu_s \mp i \tilde{\varphi}^{(2)}(\cdot, K)$ est à variation bornée sur (X, ∞) uniformément en $K \geq \varepsilon$ (cf. démonstration de la proposition 6 point b) : $\tilde{\varphi}^{(2)}(ds, K) = \varphi^{(2)}(ds, K)$ et encore du fait que $\tilde{f}(\cdot, \mp K)$ et $\overset{\circ}{f}(\cdot, \mp K)$ ont le même comportement pour $x \rightarrow \infty$, on voit facilement que :

$$\tilde{f}(x, \mp K) - \overset{\circ}{f}(x, \mp K) = \int_{x+\infty}^{\infty} (u_K(y) v_K(x) - u_K(x) v_K(y)) \overset{\circ}{f}(y, \mp K) [\mu_s(dy) \mp i \tilde{\varphi}^{(2)}(dy, K)]$$

(voir la démonstration de la proposition 8, Annexe 1)

Dans la proposition 4 (Annexe 1) prenons $g(x) = K^2 - 2m V_L(x+0)$ et $f(t) = \sqrt{t}$; donc $\tilde{\varphi}^+(x, K) = f(g(x))$. Si $K \geq \epsilon$ nous avons $g(x) \geq \delta > 0 \quad \forall x \geq X$, les hypothèses de la proposition 4 (Annexe 1) sont donc vérifiées. Alors si $h(\cdot, K)$ est la fonction

$$-\frac{1}{2m} h(x, K) = \begin{cases} \frac{1}{2} (K^2 - 2m V_L(x))^{-\frac{1}{2}} & \text{si } V_L \text{ est continue en } x \\ \frac{\sqrt{K^2 - 2m V_L(x+0)} - \sqrt{K^2 - 2m V_L(x-0)}}{2m (V_L(x+0) - V_L(x-0))} & \text{si } V_L \text{ n'est pas continue en } x \end{cases}$$

nous aurons : $\tilde{\varphi}^{(2)}(\cdot, K) = (f \circ g)^{(1)} = -\frac{1}{2m} h(\cdot, K) (-2m) V_L^{(1)}$

ou bien : $\tilde{\varphi}^{(2)}(dy, K) = h(y, K) dV_L(y)$

Donc :

$$\tilde{f}(x, \mp K) - \overset{\circ}{f}(x, \mp K) = \int_{x+0}^{\infty} (u_K(x) v_K(y) - u_K(y) v_K(x)) \overset{\circ}{f}(y, \mp K) [\mu_s(dy) \mp i h(y, K) dV_L(y)]$$

b) Nous avons :

$$\begin{aligned} J_1(x, \pm) &= \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\Im_m \left(e^{i(\delta(K) - \frac{Q\sqrt{K}}{2})} \tilde{f}(x, -K) \right) - \Im_m \left(e^{i(\delta(K) - \frac{Q\sqrt{K}}{2})} \overset{\circ}{f}(x, -K) \right) \right] e^{i(\frac{K^2}{2m} |z| + \delta(K))} (\overset{\circ}{f} f)(K) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} i} \int_0^{\infty} \left[\tilde{f}(x, -K) - \overset{\circ}{f}(x, -K) \right] e^{i \frac{K^2}{2m} |z|} e^{i(2\delta(K) - \frac{Q\sqrt{K}}{2})} (\overset{\circ}{f} f)(K) dK \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi} i} \int_0^{\infty} \left[\tilde{f}(x, +K) - \overset{\circ}{f}(x, +K) \right] e^{i \frac{K^2}{2m} |z|} e^{i \frac{Q\sqrt{K}}{2}} (\overset{\circ}{f} f)(K) dK \end{aligned}$$

On étudiera seulement le premier terme, que l'on note $J_{II}(x, t)$, le deuxième étant du même type. Soit :

$$g_{\pm}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} e^{i\frac{k^2}{2\omega} |t|} e^{i(2J(k) - \frac{e\hbar}{2})} (\tilde{f}f)(k)$$

C'est une fonction bornée à support compact dans (ε, ∞) et :

$$J_{11}(x,t) = \int_0^{\infty} [\tilde{f}(x,-k) - \overset{\circ}{f}(x,-k)] g_{\pm}(k) dk$$

Nous allons introduire l'expression obtenue plus haut pour $\tilde{f}(x,-k) - \overset{\circ}{f}(x,-k)$ et changer l'ordre d'intégration (le théorème de Fubini est évidemment applicable); on obtient ainsi deux termes du même type dont nous étudierons que le second (c'est le plus compliqué) :

$$J_{12}(x,t) = -i \int_{x+0}^{\infty} dV_L(y) \int_0^{\infty} (u_k(x) v_k(y) - u_k(y) v_k(x)) \overset{\circ}{f}(y,-k) g_{\pm}(k) h(y,k) dk$$

Alors, pour $R \geq X$:

$$\begin{aligned} \left(\int_R^{\infty} |J_{12}(x,t)|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left(\int_R^{\infty} \left(\int_{x+0}^{\infty} |dV_L(y)| \int_0^{\infty} (u_k(x) v_k(y) - u_k(y) v_k(x)) \overset{\circ}{f}(y,-k) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot g_{\pm}(k) h(y,k) dk \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_R^{\infty} \left(\int_{x+0}^{\infty} |dV_L(y)| \int_0^{\infty} (u_k(x) v_k(y) - u_k(y) v_k(x)) \overset{\circ}{f}(y,-k) g_{\pm}(k) h(y,k) dk \right)^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left\| \int_{x+0}^{\infty} |dV_L(y)| \cdot \int_0^{\infty} (u_k v_k(y) - u_k(y) v_k) \overset{\circ}{f}(y,-k) g_{\pm}(k) h(y,k) dk \right\|_{L^2((R,\infty))} \\ &\leq \int_{x+0}^{\infty} |dV_L(y)| \cdot \left\| \int_0^{\infty} (u_k v_k(y) - u_k(y) v_k) \overset{\circ}{f}(y,-k) g_{\pm}(k) h(y,k) dk \right\|_{L^2((R,\infty))} \end{aligned}$$

(nous avons appliqué l'inégalité de Cauchy - Schwartz pour des fonctions à valeurs dans $L^2((R,\infty))$; cf. Dunford - Schwartz (1)

VI - 11.13) Donc : $R \geq X$:

$$\left(\int_R^\infty |f_{H_2}(x,t)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \sup_{y \geq X} \left\| \int_0^\infty (u_K v_K(y) - u_K(y) v_K) \dot{f}(y, -K) g_t(K) h(y, K) dK \right\|_{L^2(X, \infty)} \cdot \int_{R+0}^\infty |dv_{L^2(y)}|$$

Comme le dernier facteur tend vers zéro pour $R \rightarrow \infty$ il suffit de montrer que le premier est borné uniformément en $t \leq 0$.
Le premier facteur est majoré par le sup sur $y \geq X$ de l'expression

$$(4) \quad \left\| \int_0^\infty u_K v_K(y) \dot{f}(y, -K) g_t(K) h(y, K) dK \right\|_{L^2(X, \infty)} + \\ + \left\| \int_0^\infty v_K u_K(y) \dot{f}(y, -K) g_t(K) h(y, K) dK \right\|_{L^2(X, \infty)}$$

On note H_u (resp H_v) l'extension auto-adjointe de l'opérateur minimal engendré dans $L^2(X, \infty)$ par l'expression différentielle $\frac{1}{2m} \tau$ (cf. paragraphe 4) définie par la condition à la limite $f^+(X) = 0$ (resp $f(X) = 0$) (comme X est extrémité régulière, H_u, H_v sont bien définis et auto-adjoints; on peut utiliser les méthodes de Stone (1), par exemple, pour la démonstration). D'après la définition de u_K (resp v_K) il est évident que u_K (resp v_K) sont les fonctions propres généralisées de H_u (resp H_v) intervenant dans le développement spectral associé à H_u (resp H_v) (ce sont les analogues de ϕ_λ , avec $\lambda = K^2$; voir par exemple Naimark (1) paragraphe 21.3). La proposition 8 de même que la proposition 5 restent évidemment valable pour H_u et H_v (pour H_v il suffit de remarquer que l'on peut remplacer 0 par X dans la proposition 8; H_u est défini par une condition à la limite d'un autre type, mais il est clair que la démonstration de la proposition 8 est encore valable si on utilise la fonction de Green G_z associée à H_u .) Il suit que la fonction spectrale ρ_u (resp ρ_v) associée par la proposition 5 (qui est triviale dans

le cas d'une extrémité régulière) à H_u (resp H_v) est continûment dérivable pour $K > 0$ (on fait le changement de variables $\lambda = K^2$) et que :

$$g'_u(\kappa) > 0 \quad (\text{resp } g'_u(\kappa) > 0) \quad \forall \kappa > 0.$$

Ce qui nous intéresse est la relation de Parseval :

si $F \in L^2_{\rho_u}((0, \infty))$ alors (on pose $F(K) = 0$ pour $K \leq 0$)

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^2_{\rho_u}((0, \infty))} &= \left\| \int_0^\infty u_\kappa F(\kappa) g_u(d\kappa) \right\|_{L^2((x, \infty))} = \\ &= \left(\int_x^\infty \left| \int_0^\infty u_\kappa(x) F(\kappa) g'_u(\kappa) d\kappa \right|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

(et la relation similaire pour v). Comme g_t a un support compact dans $(0, \infty)$ nous avons :

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^\infty u_\kappa v_\kappa(y) \dot{f}(y, -\kappa) g_t(\kappa) h(y, \kappa) d\kappa \right\|_{L^2(x, \infty)} = \\ &= \left\| \int_0^\infty u_\kappa v_\kappa(y) \dot{f}(y, -\kappa) g_t(\kappa) h(y, \kappa) (g'_u(\kappa))^{-1} g_u(d\kappa) \right\|_{L^2(x, \infty)} = \\ &= \left\| v_\kappa(y) \dot{f}(y, -\kappa) g_t(\kappa) h(y, \kappa) (g'_u(\kappa))^{-1} \right\|_{L^2((0, \infty); g_u(d\kappa))} \leq \\ &\leq \sup_{y > x} \sup_{\kappa \in \text{supp}(\dot{f})} |v_\kappa(y) \dot{f}(y, -\kappa) h(y, \kappa)| \cdot \left\| g_t \frac{1}{g'_u} \right\|_{L^2_{g_u}((0, \infty))} \end{aligned}$$

D'après les propriétés de v_K et la définition de h le premier facteur est fini. D'autre part la dépendance en t de g_t provient du facteur $e^{i \frac{K^2}{2} t}$ qui disparaît quand on prend le module. Il suit que l'expression précédente est une quantité finie, indépendante de t . De manière similaire on traite le deuxième terme de (4); l'affirmation faite avant (4) est donc démontrée.

c) Nous allons étudier maintenant $J_2(x, t)$. Remarquons que si l'on note $g(K) = \exp i(2\delta(K) - \frac{0\pi}{2}) \cdot \overset{0}{f}(K)$ il suffit alors de montrer que pour toute fonction g bornée et à support compact dans $(0, \infty)$ (mais qui ne soit pas à variation bornée en général) on a :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{t \neq 0} \int_R^\infty dx \left| \int_0^\infty \exp i \left(\int_{x(K)}^x \sqrt{k^2 - 2u V_L(s)} ds + \frac{k^2}{2u} |t| \right) \cdot g(k) dk \right|^2 = 0$$

Soit

$$\begin{aligned} I(x, t) &= \int_0^\infty \exp i \left(\int_{x(K)}^x \sqrt{k^2 - 2u V_L(s)} ds + \frac{k^2}{2u} |t| \right) \cdot g(k) dk = \\ &= \int_0^\infty \overset{0}{f}(x, -k) e^{i \frac{k^2}{2u} |t|} g(k) dk = \\ &= \int_0^\infty (\overset{0}{f}(x, -k) - \tilde{f}(x, -k)) e^{i \frac{k^2}{2u} |t|} g(k) dk + \int_0^\infty \tilde{f}(x, -k) e^{i \frac{k^2}{2u} |t|} g(k) dk \end{aligned}$$

Dans l'analyse de $J_1(x, t)$ nous avons déjà montré que le premier terme de la dernière expression vérifie :

$$(5) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{t \neq 0} \int_R^\infty dx \left| \int_0^\infty (\overset{0}{f}(x, -k) - \tilde{f}(x, -k)) e^{i \frac{k^2}{2u} |t|} g(k) dk \right|^2 = 0$$

(voir la démonstration au point b)).

Il ne nous reste qu'à estimer le deuxième terme de $I(x, t)$ que l'on note $I_2(x, t)$. Comme $\tilde{f}(\cdot, -K)$ et u_K, v_K vérifient la même équation et $W(u_K, v_K) = 1$, il existe des $\alpha_K, \beta_K \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\tilde{f}(\cdot, -K) = \alpha_K u_K + \beta_K v_K$$

Il est clair que la fonction $K \mapsto (\alpha_K, \beta_K)$ est continue. Alors pour $R \geq X$ nous avons :

$$\begin{aligned}
 \|I_2(\cdot, t)\|_{L^2((R, \infty))} &= \left\| \int_0^\infty (\alpha_K u_K + \beta_K v_K) e^{i \frac{K^2}{2m} t} g(K) dK \right\|_{L^2((R, \infty))} \\
 &\leq \left\| \int_0^\infty u_K \alpha_K e^{i \frac{K^2}{2m} t} g(K) dK \right\|_{L^2((R, \infty))} + \left\| \int_0^\infty v_K \beta_K e^{i \frac{K^2}{2m} t} g(K) dK \right\|_{L^2((R, \infty))} \\
 &\leq \left\| \int_0^\infty u_K \alpha_K e^{i \frac{K^2}{2m} t} g(K) (\rho'_u(K))^{-1} \rho_u(dK) \right\|_{L^2((R, \infty))} + \left\| \int_0^\infty v_K \beta_K e^{i \frac{K^2}{2m} t} \frac{g(K)}{\rho'_v(K)} \rho_v(dK) \right\|_{L^2((R, \infty))} \\
 &= \left\| \alpha_K e^{i \frac{K^2}{2m} t} \frac{g(K)}{\rho'_u(K)} \right\|_{L^2((0, \infty); \rho_u(dK))} + \left\| \beta_K e^{i \frac{K^2}{2m} t} \frac{g(K)}{\rho'_v(K)} \right\|_{L^2((0, \infty); \rho_v(dK))} \\
 &= \left(\int_0^\infty |\alpha_K|^2 |g(K)|^2 \frac{\rho'_u(K) dK}{(\rho'_u(K))^2} \right)^{1/2} + \left(\int_0^\infty |\beta_K|^2 |g(K)|^2 \frac{\rho'_v(K) dK}{(\rho'_v(K))^2} \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Comme $\text{supp } g \subset [a, b] \subset (0, \infty)$ et que les fonctions $K \mapsto (\alpha_K, \beta_K)$, $K \mapsto (\rho'_u, \rho'_v)$ sont continues et $\rho'_u(K) > 0$ ($\forall K > 0$), $\rho'_v(K) > 0$ ($\forall K > 0$) il suit que $\|I_2(\cdot, t)\|_{L^2((R, \infty))} \leq C \|g\|_{L^2((0, \infty))}$ où $C < \infty$ ne dépend que de $[a, b]$.

Il est clair que l'on peut supposer $\text{supp } g \subset [a+\eta, b-\eta]$ pour un $\eta > 0$.

Pour un $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver une fonction continûment différentiable g_ε à support compact dans (a, b) telle que

$\|g - g_\varepsilon\|_{L^2(0, \infty)} \leq \varepsilon$. Si on note I_2^ε l'expression I_2 où l'on a remplacé par g_ε nous aurons :

$$\begin{aligned}
 \|I_2(\cdot, t)\|_{L^2(R, \infty)} &\leq \|I_2(\cdot, t) - I_2^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(R, \infty)} + \|I_2^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(R, \infty)} \\
 &\leq C \|g - g_\varepsilon\|_{L^2(0, \infty)} + \|I_2^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(R, \infty)} \\
 &\leq C \cdot \varepsilon + \|I_2^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(R, \infty)}
 \end{aligned}$$

Il suffit ainsi de montrer que $\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{t \leq 0} \|I_2(\cdot, t)\|_{L^2(R, \infty)} = 0$

pour g continûment différentiable. Mais on peut écrire :

$$I_2(x,t) = \int_0^\infty (\tilde{f}(x,-\kappa) - \dot{f}(x,-\kappa)) e^{i \frac{\kappa^2}{2m} |t|} g(\kappa) d\kappa + \int_0^\infty \dot{f}(x,-\kappa) e^{i \frac{\kappa^2}{2m} |t|} g(\kappa) d\kappa$$

Pour le premier terme on utilise (5); pour le deuxième on utilise la remarque faite au début de la démonstration (juste avant le point a)).

QED

Comme application de la proposition précédente nous donnerons un critère d'existence pour les opérateurs d'onde habituels (cf. J.M. Jauch)

Soient V_1, V_2 deux mesures sur I vérifiant les hypothèses du début du paragraphe 4 telles que $V_1 - V_2$ est une mesure à variation bornée au voisinage de l'infini.

On définit les opérateurs H_1, H_2 associés à V_1, V_2 pour une même masse $m > 0$, mais en général pour des moments cinétiques différents $\ell_1 > -\frac{1}{2}, \ell_2 > -\frac{1}{2}$.

L'hypothèse faite sur $V_1 - V_2$ implique que V_1, V_2 ont la même partie à longue portée, c'est-à-dire

$$V_i(dx) = V_{is}(dx) + V_L(x) dx$$

Nous choisissons la fonction (indépendante de i) $K \mapsto X(K)$ comme cela a été fait au début du paragraphe 5 et nous définissons les déphasages $K \mapsto \delta_i(K)$ associés à cette fonction et aux fonctions propres généralisées Ψ_i associées à H_i . On note $\mathcal{F}_i$ la transformée de Fourier associée à H_i , et si $H_i = \int \lambda E^i(d\lambda)$ on pose $P_i = E^i((0, \infty))$ (cf. paragraphe 4)

Remarquons que le comportement asymptotique des $\Psi_i(\cdot, K)$ est

$$\psi_i(x, \kappa) \sim \sqrt{\frac{z}{\kappa}} \sin \left(\int_{x(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - z u V_L(u)} \, du + \delta_i(\kappa) - \frac{e_i \pi}{2} \right)$$

par convention. Remarquons que les opérateurs $\overset{\circ}{H}_i$.

"libres" associés à H_1 sont différents si $e_1 \neq e_2$.

Pour $f \in P_2 L^2(I)$ on pose :

$$[\Omega_{\pm}(H_1, H_2) f](x) = \int_0^{\infty} e^{\pm i(\delta_1(\kappa) - \delta_2(\kappa) - \frac{e_1 - e_2}{2} \pi)} \psi_1(x, \kappa) (\mathcal{F}_2 f)(\kappa) d\kappa$$

Si on note $e^{\pm i(\delta_1 - \delta_2 - \frac{e_1 - e_2}{2} \pi)}$ les opérateurs de multiplication par $K \mapsto \exp \pm i(\delta_1(\kappa) - \delta_2(\kappa) - \frac{e_1 - e_2}{2} \pi)$ dans $L^2((0, \infty))$ alors :

$$\Omega_{\pm}(H_1, H_2) = \mathcal{F}_1^* e^{\pm i(\delta_1 - \delta_2 - \frac{e_1 - e_2}{2} \pi)} \mathcal{F}_2$$

En particulier les opérateurs $\Omega_{\pm}(H_1, H_2) : P_2 L^2(I) \rightarrow P_1 L^2(I)$ sont unitaires et :

$$e^{-iH_1 t} \Omega_{\pm}(H_1, H_2) = \Omega_{\pm}(H_1, H_2) e^{-iH_2 t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Proposition 14

Sous les conditions précédentes :

$$\Omega_{\pm}(H_1, H_2) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{iH_1 t} e^{-iH_2 t} P_2$$

Démonstration

Nous indiquerons deux méthodes de démonstration :

1) Considérons d'abord les opérateurs suivants :

$$\Omega_{\pm}(H_1, \overset{\circ}{H}_2) \equiv \mathcal{F}_1^* e^{\pm i(\delta_1 - (e_1 - e_2) \frac{\pi}{2})} \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2$$

(les notations sont évidentes). Si $\mathcal{K}_\pm (\overset{\circ}{H}_1)$ est l'opérateur $\mathcal{K}_\pm$ associé à $\overset{\circ}{H}_1$ et V_L , alors :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\Omega_+ (H_1, \overset{\circ}{H}_2) - \tilde{\mathcal{K}}_+ (\overset{\circ}{H}_2) \right) f \right] (x) = \\ &= \int_0^\infty e^{+i(\delta_1(\kappa) - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\pi)} \left(\psi_1(x, \kappa) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left(\int_{X(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(s)} ds + \delta_1(\kappa) - \frac{\varrho_1\pi}{2} \right) \right) e^{-i\frac{\kappa^2 t}{2m}} (\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 f)(\kappa) d\kappa \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \int_0^\infty e^{i(\delta_1(\kappa) - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\pi)} \cdot \exp i \left(\int_{X(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(s)} ds + \delta_1(\kappa) - \frac{\varrho_1\pi}{2} \right) \cdot e^{-i\frac{\kappa^2 t}{2m}} (\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 f)(\kappa) d\kappa \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \int_0^\infty e^{i(\delta_1(\kappa) - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\pi)} \cdot \exp -i \left(\int_{X(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(s)} ds + \delta_1(\kappa) - \frac{\varrho_1\pi}{2} \right) \cdot e^{-i\frac{\kappa^2 t}{2m}} (\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 f)(\kappa) d\kappa \\ &- \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp -i \left(\int_{X(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2mV_L(s)} ds - \frac{\varrho_2\pi}{2} \right) \cdot e^{-i\frac{\kappa^2 t}{2m}} (\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 f)(\kappa) d\kappa \end{aligned}$$

Les deux derniers termes s'annulent et on peut suivre la démonstration de la proposition 13 pour obtenir :

$$\Omega_\pm (H_1, \overset{\circ}{H}_2) f = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iH_1 t} \mathcal{K}_\pm (\overset{\circ}{H}_2) e^{-i\overset{\circ}{H}_2 t} f$$

si $f \in L^2(I)$ est telle que $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 f$ est à variation bornée et à support compact dans $(0, \infty)$.

D'autre part :

$$\Omega_\pm (H_2, \overset{\circ}{H}_2) f = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iH_2 t} \mathcal{K}_\pm (\overset{\circ}{H}_2) e^{-i\overset{\circ}{H}_2 t} f$$

pour un tel f , où : $\Omega_\pm (H_2, \overset{\circ}{H}_2) = \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2^* e^{\pm i\delta_2} \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2$

Il est alors clair que : $\Omega_\pm (H_1, H_2) = \Omega_\pm (H_1, \overset{\circ}{H}_2) \Omega_\pm^* (H_2, \overset{\circ}{H}_2)$ et que si f a les mêmes propriétés qu'elle avait plus haut :

$$\begin{aligned} & \| e^{-iH_1 t} \Omega_\pm (H_1, \overset{\circ}{H}_2) f - e^{-iH_2 t} \Omega_\pm (H_2, \overset{\circ}{H}_2) f \| \leq \\ & \leq \| e^{-iH_1 t} \Omega_\pm (H_1, \overset{\circ}{H}_2) f - \mathcal{K}_\pm (\overset{\circ}{H}_2) e^{-i\overset{\circ}{H}_2 t} f \| + \\ & + \| \mathcal{K}_\pm (\overset{\circ}{H}_2) e^{-i\overset{\circ}{H}_2 t} f - e^{-iH_2 t} \Omega_\pm (H_2, \overset{\circ}{H}_2) f \| \rightarrow 0 \quad \text{si } t \rightarrow \mp\infty \end{aligned}$$

La relation de l'énoncé est démontrée pour un ensemble dense dans $P_2 L^2(I)$, elle est donc valable partout.

2) On peut donner une démonstration directe; comme dans la démonstration de la proposition 13, on voit qu'il suffit que $\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{t \leq 0} \| (\mathcal{J} - P_R) (\Omega_+ - \mathcal{J}) e^{-iH_2 t} f \| = 0$ si $\mathcal{F}_2 f$ est continue et à support compact dans $(0, \infty)$.

Alors :

$$\begin{aligned} ((\Omega_+ - \mathcal{J}) e^{-iH_2 t} f)(x) &= \int_0^\infty \psi_1(x, \kappa) e^{i(\delta_1(\kappa) - \delta_2(\kappa) - \frac{e_1 - e_2}{2} t)} e^{-i \frac{\kappa^2}{2m} t} (\mathcal{F}_2 f)(\kappa) d\kappa - \\ &\quad - \int_0^\infty \psi_2(x, \kappa) e^{-i \frac{\kappa^2}{2m} t} (\mathcal{F}_2 f)(\kappa) d\kappa = \\ &= \int_0^\infty \left[e^{i(\delta_1(\kappa) - \frac{e_1}{2} t)} \psi_1(x, \kappa) - e^{i(\delta_2(\kappa) - \frac{e_2}{2} t)} \psi_2(x, \kappa) \right] e^{-i \frac{\kappa^2}{2m} t} e^{-i(\delta_2(\kappa) - \frac{e_2}{2} t)} (\mathcal{F}_2 f)(\kappa) d\kappa \end{aligned}$$

On introduit les fonctions de Jost modifiées $\tilde{f}_j(\cdot, \pm K)$ telles que :

$$\psi_j(\cdot, \kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left(e^{i(\delta_j(\kappa) - \frac{e_j}{2} t)} \tilde{f}_j(\cdot, -\kappa) \right)$$

L'essentiel est que $\tilde{f}_1(\cdot, \pm K)$ et $\tilde{f}_2(\cdot, \pm K)$ ont le même comportement asymptotique; on voit alors que :

$$\tilde{f}_2(x, \pm \kappa) - \tilde{f}_1(x, \pm \kappa) = \int_{x=0}^{\infty} (u_{\kappa_2}(x) v_{\kappa_2}(y) - u_{\kappa_2}(y) v_{\kappa_2}(x)) \tilde{f}_1(y, \pm \kappa) (\mu_2(dy) - \mu_1(dy))$$

Cette équation permet de faire le même raisonnement que dans la propositions 13; on utilise aussi ce que l'on a démontré pour $\mathbf{I}_2(x, t)$ dans cette proposition (on l'applique séparément à $\tilde{f}_1(x, -K)$ et $\tilde{f}_2(x, -K)$ pour $t \rightarrow -\infty$)

QED

Dans la suite de ce paragraphe nous supposons que les conditions de la proposition 9, sont vérifiées, et nous adoptons les mêmes notations qu'au paragraphe 5 (voir page 70). On définit les

opérateurs d'onde :

$$\Omega'_{\pm} = \mathcal{F}^* e^{\pm \delta'} \mathcal{F}^0$$

Les opérateurs $\Omega'_{\pm}$ ont des propriétés similaires aux opérateurs $\Omega_{\pm}$ et : $\Omega_{\pm} = \Omega'_{\pm} U_{\pm}$ avec $U_{\pm} = \mathcal{F}^* e^{\pm i(\delta' - \delta)} \mathcal{F}^0$; on voit que $U_{\pm}$ est un opérateur unitaire fonction de $\overset{0}{H}$: $U_{\pm} = h_{\pm}(\overset{0}{H})$ et que $h_{\pm}$ ne dépend pas de ℓ . On a $h_{\pm}(\overset{0}{H}) = \exp \pm i (\delta'(\sqrt{2m\overset{0}{H}}) - \delta(\sqrt{2m\overset{0}{H}}))$

Proposition 13'

Si $f \in L^2(I)$ est telle que $\overset{0}{\mathcal{F}}f$ est à variation bornée et à support compact dans I , alors :

$$\Omega'_{\pm} f = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{iHt} \mathcal{K}'_{\pm} e^{-i\overset{0}{H}t} f$$

Démonstration

Comme on l'a fait dans la proposition 13 on se ramène à démontrer :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{t \leq t_0} \| (1 - P_R) (\Omega'_{\pm} - \tilde{\mathcal{K}}'_{\pm}) e^{-i\overset{0}{H}t} f \| = 0$$

Nous avons (pour les notations voir paragraphe 4)

$$\psi(x, \kappa) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(\kappa x - \varphi_N(x, \kappa) + \delta'(\kappa) - \frac{\ell\kappa}{2})$$

donc :

$$\begin{aligned} ((\Omega'_{+} - \tilde{\mathcal{K}}'_{+}) e^{-i\overset{0}{H}t} f)(x) &= \int_0^{\infty} e^{i\delta'(\kappa)} \left[\psi(x, \kappa) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(\kappa x - \varphi_N(x, \kappa) + \delta'(\kappa) - \frac{\ell\kappa}{2}) \right] e^{-i\frac{\kappa^2}{2m}t} (\overset{0}{\mathcal{F}}f)(\kappa) d\kappa + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \int_0^{\infty} e^{i\delta'(\kappa)} e^{i(\kappa x - \varphi_N(x, \kappa) + \delta'(\kappa) - \frac{\ell\kappa}{2})} e^{-i\frac{\kappa^2}{2m}t} (\overset{0}{\mathcal{F}}f)(\kappa) d\kappa - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \int_0^\infty e^{i\delta'(\kappa)} e^{-i(\kappa x - \varphi_N(x, \kappa) + \delta'(\kappa) - \frac{\pi}{2})} e^{-i \frac{\kappa^2}{2u} \pm (\frac{\pi}{2} f)(\kappa)} d\kappa - \\
 & -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i(\varphi_N(x, \kappa) - \kappa x + \frac{\pi}{2})} e^{-i \frac{\kappa^2}{2u} \pm (\frac{\pi}{2} f)(\kappa)} d\kappa = \\
 & = \int_0^\infty \left[\varphi(x, \kappa) - \sqrt{\frac{2}{u}} \sin(\kappa x - \varphi_N(x, \kappa) + \delta'(\kappa) - \frac{\pi}{2}) \right] e^{i \frac{\kappa^2}{2u} \pm 1} e^{i\delta'(\kappa)} (\frac{\pi}{2} f)(\kappa) d\kappa + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \int_0^\infty e^{i(\kappa x - \varphi_N(x, \kappa) + \frac{\kappa^2}{2u} \pm 1)} e^{i(2\delta'(\kappa) - \frac{\pi}{2})} (\frac{\pi}{2} f)(\kappa) d\kappa.
 \end{aligned}$$

On peut alors procéder exactement comme dans la proposition 13 à condition de définir les solutions de Jost figurant dans la proposition 6 par le comportement asymptotique suivant :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{i(Kx - \varphi_N(x, K))} f(x, K) = 1$$

pour $K \in \mathbb{C}_-^\varepsilon$. La démonstration de la proposition 6 reste valable (elle devient même plus simple si l'on prend un X qui soit si grand que V_L est à variation bornée sur (X, ∞) ; on voit alors facilement que V_L^n sera aussi à variation bornée $\forall n \geq 0$. En fait si on remarque que les $f(\cdot, K)$ introduits ici ne diffèrent des $f(\cdot, K)$ de la proposition 6 que par une constante multiplicative qui dépend continûment de $K \in \mathbb{C}_-^\varepsilon$, il n'est même plus nécessaire d'en refaire la démonstration.

On continue la démonstration comme dans la proposition 13 avec :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}(x, \kappa) &= x\kappa - \varphi_N(x, \kappa) & (\kappa \gg \varepsilon) \\
 \tilde{f}(x, \mp \kappa) &= \exp \pm i \tilde{\varphi}(x, \kappa)
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

7. Modifications de l'évolution libre dépendantes du temps

Nous allons montrer que si V_L décroît à l'infini plus rapidement que $x^{-\frac{1}{2}}$ (et satisfait quelques conditions de régularité) nous pouvons obtenir les opérateurs $\Omega'_\pm$ (proposition 13' pour $N = 2$) à l'aide d'évolutions libres modifiées T'_t qui sont reliées d'une manière très simple aux opérateurs $\mathcal{K}'_\pm$: il suffit de poser $x = \frac{K}{m} |t|$ dans la phase $\varphi_N(x, K)$ ($N = 2$) qui intervient dans la définition de $\mathcal{K}'_\pm e^{-iHt}$.

Pour $N = 2$

$$\varphi_2(x, K) = -c_1 \frac{K}{E^2} \int_0^x V_L d\kappa = \frac{u}{K} \int_0^x V_L(\kappa) d\kappa$$

donc :

$$(\mathcal{K}'_\pm \phi)(x) = \int_0^\infty e^{\pm i \frac{u}{K} \int_0^x V_L(\kappa) d\kappa} \cdot \psi(x, K) \left(\frac{\circ}{\mp} \phi \right)(K) dK$$

Nous allons donc définir :

$$t \leq 0 \Rightarrow \left(\tilde{T}'^\pm_t \phi \right)(x) = \int_0^\infty e^{\pm i \frac{u}{K} \int_0^{\frac{K|t|}{u}} V_L(\kappa) d\kappa} \cdot \psi(x, K) \left(\frac{\circ}{\mp} \phi \right)(K) dK$$

Il suit que les $\tilde{T}'^\pm_t$ sont des opérateurs unitaires fonctions de $\overset{\circ}{H}$.
On remarque que :

$$\pm \frac{u}{K} \int_0^{\frac{K|t|}{u}} V_L(\kappa) d\kappa = \pm \int_0^{|t|} V_L\left(\frac{K}{u} s\right) ds = - \int_0^t V_L\left(\frac{K}{u} |s|\right) ds \quad \text{si } t \leq 0$$

Les opérateurs $\tilde{T}'^\pm_t$ coïncident donc avec les modifications utilisées dans la théorie algébrique de la diffusion.

On définit : $t \leq 0 \Rightarrow T'^\pm_t = \tilde{T}'^\pm_t e^{-i\overset{\circ}{H}t}$

Si on note $G_\pm(K) = \int_0^t \left(\frac{K^2}{2u} + V_L\left(\frac{K}{u} |s|\right) \right) ds$ alors :

$$t \leq 0 \Rightarrow T'^\pm_t \equiv T'_t = e^{-i G_\pm(\sqrt{2u} \overset{\circ}{H})}$$

Proposition 14'

Supposons que : 1) $V_L \in C^3([0, \infty))$; 2) $\exists \alpha > \frac{1}{2}$ et $c < \infty$ tels que $\forall x$: $|V_L(x)| \leq c(1+x)^{-\alpha}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^i V_L^{(i)}(x) = 0$; pour $i = 1, 2, 3$

Soient $\Omega'_\pm$ les opérateurs définis dans la proposition 13' pour $N = 2$. Alors :

$$\Omega'_\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{iHt} T'_t$$

Démonstration

Il suffit de montrer que pour un ensemble dense de fonctions $f \in L^2(I)$ (vérifiant les conditions de la proposition 13') nous avons : $\lim_{t \rightarrow \mp \infty} \| (K'_\pm e^{-iHt} - T'_t) f \| = 0$

Nous avons calculé (proposition 12') le comportement asymptotique de $K'_\pm e^{-iHt}$: si f est de classe C^2 et à support compact dans (K_i, K_s) ($[K_i, K_s] \subset (0, \infty)$) alors pour $\varepsilon > 0$ et $K_i \leq m \frac{x}{|t|} \leq K_s$ l'équation :

$$x = \frac{\kappa}{m} |t| - \frac{1}{2E} \int_0^x V_L(\lambda) d\lambda$$

a une solution unique $K' = K'(x, t) \in (K_i - \varepsilon, K_s + \varepsilon)$.

remarquons que

$$\begin{aligned} |K'(x, t) - m \frac{x}{|t|}| &\leq \frac{m}{2E'|t|} \int_0^x |V_L(\lambda)| d\lambda \leq \frac{m}{2E'|t|} \int_0^x \frac{c}{\lambda^\alpha} d\lambda = \\ &= \frac{m}{2E'|t|} \cdot c \cdot \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad (\text{pour } \alpha = 1 \text{ on pose } \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \ln x; \text{ pour } \alpha \geq 1 \\ \text{l'estimation doit \^etre faite avec } (1+\lambda)^{-\alpha} \text{ pour \^eliminer la} \\ \text{singularit\'e en } 0). \text{ Comme } \frac{x}{|t|} \leq \text{const et } K'(x, t) \geq K_i - \varepsilon > 0 \text{ on} \\ \text{obtient : } |K'(x, t) - m \frac{x}{|t|}| &\leq \text{const} \cdot |t|^{-\alpha} \text{ (pour } \alpha = 1 \text{ on} \\ \text{remplace } |t|^{-\alpha} \text{ par } \ln |t| \cdot |t|^{-1}). \end{aligned}$$

Si on pose:

$$(\mathcal{U}'_t f)(x) = \pm i \frac{\chi(\kappa_i \leq \frac{m x}{|t|} \leq \kappa_s) \ell \left(E'(x, t) |t| - \kappa'(x, t) x + \frac{m}{\kappa'(x, t)} \int_0^x V_L(\lambda) d\lambda + \frac{2E+1}{4} \pi \right)}{\left[\frac{|t|}{m} + \frac{1}{\kappa'(x, t) \cdot E'(x, t)} \int_0^x V_L(\lambda) d\lambda \right]^{1/2}} (\mathcal{F} f)(\kappa'(x, t))$$

alors :

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\mathcal{K}'_t e^{-i\hat{H}t} f - \mathcal{E}'_t f) = 0$$

Il suffit donc de montrer que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\mathcal{E}'_t f - T_t'^{\pm} f\| = 0$

Dans ce qui va suivre nous allons chercher le comportement asymptotique de $T_t'^{\pm} f$.

a) Avec les notations introduites au début de la démonstration de la proposition 10, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} (T_t'^{\pm} f)(x) &= \int_0^{\infty} \exp \pm i \left(\frac{\omega}{\kappa} \int_0^{\frac{\kappa|t|}{\omega}} V_L d\kappa \mp \frac{\kappa^2}{2\omega} t \right) \cdot \hat{\psi}(x, \kappa) (\hat{f})(\kappa) d\kappa = \\ &= \int_0^{\infty} \exp \pm i \left(\varphi_2 \left(\frac{\kappa|t|}{\omega}, \kappa \right) \mp \frac{\kappa^2}{2\omega} t \right) \cdot (\kappa x)^{-(1+\tilde{\epsilon})} \tilde{\psi}(x, \kappa) (\hat{f})(\kappa) d\kappa + \\ (6) \quad &+ \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} i \int_0^{\infty} \exp \pm i \left(\varphi_2 \left(\frac{\kappa|t|}{\omega}, \kappa \right) \mp \frac{\kappa^2}{2\omega} t \pm \kappa x \mp \frac{\epsilon\tilde{\kappa}}{2} \right) \cdot (\hat{f})(\kappa) d\kappa - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} i \int_0^{\infty} \exp \pm i \left(\varphi_2 \left(\frac{\kappa|t|}{\omega}, \kappa \right) \mp \frac{\kappa^2}{2\omega} t \mp \kappa x \pm \frac{\epsilon\tilde{\kappa}}{2} \right) \cdot (\hat{f})(\kappa) d\kappa \end{aligned}$$

Le premier terme, noté $J_1(x, t)$, admet une majoration uniforme en t :
 $|J_1(x, t)| \leq c (1+x)^{-\tilde{\epsilon}-1}$.

On peut donc passer à la limite ($|t| \rightarrow \infty$) sous l'intégrale dans $\|J_1(\cdot, t)\|$. Pour montrer que $\lim_{|t| \rightarrow \infty} J_1(x, t) = 0$ pour chaque x , on ne peut pas appliquer directement le lemme de Riemann - Lebesgue. Mais :

$$\Phi \equiv \frac{d}{d\kappa} \left(\varphi_2 \left(\frac{\kappa|t|}{\omega}, \kappa \right) \mp \frac{\kappa^2}{2\omega} t \right) = - \frac{\omega}{\kappa^2} \int_0^{\frac{\kappa|t|}{\omega}} V_L d\kappa + \frac{|t|}{\kappa} V_L \left(\frac{\kappa|t|}{\omega} \right) \mp \frac{\kappa}{\omega} t$$

Si on utilise le fait que les deux premiers termes sont $o\left(\frac{1}{|t|}\right)$ uniformément en $\kappa \in [K_i, K_s]$, on obtient $\Phi > c |t|$ avec $c > 0$ et $|t|$ suffisamment grand $\forall \kappa \in [K_i, K_s]$. La deuxième dérivée étant $O(|t|)$, le lemme 1 de l'Annexe 3 implique :

$|J_1(x,t)| \leq c(x) \frac{1}{|t|}$. Ainsi $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|J_1(\cdot, t)\| = 0$

On peut étudier le deuxième (resp. troisième) terme de (6) d'une manière similaire (car si $t \rightarrow \mp \infty$, alors $\mp \frac{K^2}{2m} t = \frac{K^2}{2m} |t|$ donc la phase n'est jamais stationnaire et on peut appliquer le lemme 1 de l'Annexe 3).

Si nous définissons

$$F_{\pm}(x,t) = \pm \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{\pm i(\varphi_2(\frac{K|t|}{m}, K) \mp \frac{K^2}{2m} t - Kx + \frac{\pi}{2})} \cdot (\mathcal{F}f)(K) dK$$

nous obtenons : $F_{\pm}(\cdot, t) \in L^2(I)$ et $\lim_{t \rightarrow \mp \infty} \|T_{\pm}^{-1} f - F_{\pm}(\cdot, t)\| = 0$

b) Nous cherchons le comportement asymptotique de $F_{\pm}(x,t)$.
Montrons d'abord :

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow \mp \infty} \|P_{\frac{K|t|}{m}} F_{\pm}(\cdot, t)\| = \lim_{t \rightarrow \mp \infty} \|(1 - P_{\frac{K|t|}{m}}) F_{\pm}(\cdot, t)\| = 0$$

Nous avons : ($t \leq 0$)

$$\begin{aligned} \varphi'(K) &\equiv \frac{d}{dK} \left(\varphi_2\left(\frac{K|t|}{m}, K\right) + \frac{K^2}{2m} |t| - Kx \right) = -\frac{K}{K^2} \int_0^{\frac{K|t|}{m}} V_L d\chi + \frac{|t|}{K} V_L\left(\frac{K|t|}{m}\right) + \frac{K|t|}{m} - x = \\ &= |t| \left[\frac{K}{m} - \frac{1}{K} \cdot \frac{m}{K|t|} \int_0^{\frac{K|t|}{m}} V_L d\chi + \frac{1}{K} V_L\left(\frac{K|t|}{m}\right) \right] - x \geq \\ &\geq |t| \left(\frac{K}{m} - \varepsilon \right) - x \quad \text{pour } |t| \text{ suffisamment grand, où} \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ est donné (uniformément en $K \in [K_i, K_s]$). On prend $[K_0, K_1] \subset (K_i, K_s)$ tel que $\text{supp } \mathcal{F}f \subset [K_0, K_1]$. Donc :

$$\varphi'(K) \geq |t| \left(\frac{K_0}{m} - \varepsilon \right) - x \geq |t| \left(\frac{K_0}{m} - \varepsilon \right) - |t| \frac{K_i}{m} = \left(\frac{K_0 - K_i}{m} - \varepsilon \right) |t|$$

(resp. $\varphi'(K) \leq |t| \left(\frac{K_1}{m} + \varepsilon \right) - x \leq |t| \left(\frac{K_1 - K_s}{m} + \varepsilon \right)$)

si $x \leq \frac{K_i |t|}{m}$ (resp $x \geq \frac{K_s |t|}{m}$). En choisissant ε suffisamment petit,

on voit que le lemme 1 de l'Annexe 3 est applicable. Pour le reste de la démonstration de (7) on suit la méthode du lemme 5 (dans la région où $x \geq \frac{K_1}{m} |t|$, on doit estimer $\varphi'(K)$ en fonction de x , et non de $|t|$).

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|T_t'^{\frac{1}{2}} f - \left(\frac{P_{K_S}|t|}{m} - \frac{P_{K_I}|t|}{m} \right) F_{\pm}(\cdot, t)\| = 0$ et il suffit de chercher le comportement de $F_{\pm}(x, t)$ pour $t \rightarrow +\infty$ et $K_I \leq m \frac{x}{|t|} \leq K_S$.

Nous avons :

$$\varphi'(K) = 0 \Leftrightarrow \frac{ux}{|t|} = K - \frac{u^2}{K^2|t|} \int_0^{\frac{K|t|}{u}} V_L d\chi + \frac{u}{K} V_L\left(\frac{K|t|}{u}\right)$$

D'autre part il est clair que la dérivée par rapport à K du membre de droite sera positive pour $|t|$ suffisamment grand, uniformément en $K \in [K_I - \varepsilon, K_S + \varepsilon]$ pour un $\varepsilon \in (0, K_I)$ fixé dans la suite (on utilise par exemple le fait que $x V_L'(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \infty$). En particulier (cf. la démonstration de la proposition 12) l'équation précédente a une solution dans $(K_I - \varepsilon, K_S + \varepsilon)$ si et seulement si

$$K_I - \varepsilon - \frac{u^2}{(K_I - \varepsilon)^2 |t|} \int_0^{\frac{(K_I - \varepsilon)|t|}{u}} V_L d\chi + \frac{u}{K_I - \varepsilon} V_L\left(\frac{(K_I - \varepsilon)|t|}{u}\right) < \frac{ux}{|t|} < K_S + \varepsilon - \frac{u^2}{(K_S + \varepsilon)^2 |t|} \int_0^{\frac{(K_S + \varepsilon)|t|}{u}} V_L d\chi + \frac{u}{K_S + \varepsilon} V_L\left(\frac{(K_S + \varepsilon)|t|}{u}\right)$$

inégalités qui sont vérifiées pour $K_I \leq \frac{mx}{|t|} \leq K_S$ et $|t|$ suffisamment grand. On note $K'' = K''(x, t)$ la solution obtenue de cette façon ($K'' \in (K_I - \varepsilon, K_S + \varepsilon)$).

Remarquons que $|K''(x, t) - \frac{mx}{|t|}| \leq \text{const } |t|^{-\alpha}$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \varphi''(K) &= \frac{|t|}{u} + \frac{2u}{K^2} \int_0^{\frac{K|t|}{u}} V_L d\chi - 2 \frac{|t|}{K^2} V_L\left(\frac{K|t|}{u}\right) + \frac{t^2}{uK} V_L'\left(\frac{K|t|}{u}\right) \geq \\ &\geq c |t| > 0 \end{aligned}$$

avec $c > 0$, pour $|t|$ suffisamment grand (car le terme $\frac{|t|}{m}$ domine). La condition posée sur $V_L^{(i-1)}$ implique $M_{\varphi^{(i)}} \leq \text{const. } |t|$ (cf. Lemme 2 de l'Annexe 3 pour les notations) pour $i = 1, 2, 3, 4$. Comme on l'a fait dans la proposition 12, on démontre que $m^{\varepsilon/2} \varphi' \geq c' |t|$.

Le lemme 2 de l'annexe 3 donne alors :

$$F_{\pm}(x,t) = \pm \frac{i}{\sqrt{2\kappa}} \frac{\sqrt{2\kappa}}{\sqrt{\varphi''(\kappa')}} \left(\overset{\circ}{f} \right)(\kappa'') e^{\pm i(\varphi(\kappa'') + \frac{e\sqrt{\kappa}}{2} + \frac{\kappa}{4})} + R(x,t)$$

On définit :

$$(\mathcal{C}_t'' f)(x) = \pm i \frac{\chi(\kappa_i \leq \frac{\omega x}{1 \pm 1} \leq \kappa_s) e^{\pm i(E''|t| - \kappa''x + \frac{\omega}{\kappa''} \int_0^{\frac{\kappa''|t|}{\omega}} V_L d\kappa + \frac{2e+1}{4}\kappa)}}{\left[\frac{|t|}{\omega} + \frac{1}{\kappa'' E''} \int_0^{\frac{\kappa''|t|}{\omega}} V_L d\kappa - \frac{|t| V_L(\frac{\kappa''|t|}{\omega})}{\omega E''} + \frac{t^2}{\omega \kappa''} V_L'(\frac{\kappa''|t|}{\omega}) \right]^{1/2}} \left(\overset{\circ}{f} \right)(\kappa'')$$

En répétant les arguments de la fin de la proposition 12, on déduit de ce qui précède que

$$\lim_{t \rightarrow \mp \infty} ||T^{\pm} f - \mathcal{C}_t'' f|| = 0$$

c) Il nous reste à montrer que $\lim_{t \rightarrow \mp \infty} ||\mathcal{C}_t' f - \mathcal{C}_t'' f|| = 0$

Comme le domaine d'intégration dans cette expression est $[m^{-1} K_i |t|, m^{-1} K_s |t|]$ il suffit de trouver une majoration du type :

$$(8) \quad \kappa_i \leq \frac{\omega x}{1 \pm 1} \leq \kappa_s \Rightarrow |(\mathcal{C}_t' f)(x) - (\mathcal{C}_t'' f)(x)| \leq \frac{h(t)}{\sqrt{t}}$$

uniformément en x , avec $h(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \mp \infty$ (on intègre le carré de cette expression). On note $g = \pm i e^{\pm i(\frac{2e+1}{4}\kappa + \frac{\kappa}{4})} \overset{\circ}{f}$

e' (resp e'') ce qui reste de l'exponentielle qui intervient dans $\mathcal{C}_t'$ (resp $\mathcal{C}_t''$) et d' (resp d'') le dénominateur de $\mathcal{C}_t'$ (resp $\mathcal{C}_t''$).

Alors si $\kappa_i \leq \frac{\omega x}{|t|} \leq \kappa_s$

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_t' f)(x) - (\mathcal{C}_t'' f)(x) &= e' g(\kappa') \left(\frac{1}{d'} - \frac{1}{d''} \right) + \frac{1}{d''} (g(\kappa') - g(\kappa'')) e' + \\ &+ g(\kappa'') \frac{1}{d''} (e' - e'') \end{aligned}$$

On note J_1, J_2, J_3 les termes de l'expression ci-dessus et on

les étudie séparément

1) $|J_1| \leq \text{const} \left| \frac{1}{d'} - \frac{1}{d''} \right|$. Si on applique le théorème de la moyenne à $Z \rightarrow Z^{-\frac{1}{2}}$ on trouve

$$\left| \frac{1}{d'} - \frac{1}{d''} \right| \leq \sup \left| \frac{1}{2} Z^{-\frac{3}{2}} \right| |d'^2 - d''^2|$$

le sup étant pris sur les valeurs de Z comprises entre d'^2 et d''^2 ; comme dans d'^2 et d''^2 le terme $\frac{|t|}{m}$ domine, on obtient $d'^2 \geq \text{const} |t|$, $d''^2 \geq \text{const} |t|$ (avec des constantes strictement positives); en particulier :

$$\left| \frac{1}{d'} - \frac{1}{d''} \right| \leq \text{const} |t|^{-\frac{3}{2}} \cdot |d'^2 - d''^2|$$

D'autre part, dans l'expression $d'^2 - d''^2$ le terme $\frac{|t|}{m}$ disparaît et tous les autres termes sont majorés par $|t|^{\frac{1}{2}-\alpha}$. Alors :

$$|J_1| \leq \text{const} |t|^{-\frac{1}{2}-\alpha}$$

Ainsi J_1 vérifie (8) avec $h(t) = |t|^{-\alpha}$ (ici il suffit de supposer $\alpha > 0$).

$$2) |J_2| \leq \frac{1}{d''} |g(\kappa') - g(\kappa'')| \leq \frac{1}{d''} \sup_{\kappa} \left| \frac{d}{d\kappa} g(\kappa) \right| \cdot |\kappa' - \kappa''| \leq$$

$$\leq \frac{1}{d''} \text{const} \left(\left| \kappa' - \frac{m\pi}{|t|} \right| + \left| \frac{m\pi}{|t|} - \kappa'' \right| \right) \leq \frac{\text{const}}{d''} |t|^{-\alpha}$$

et on a vu que $d'' \geq c \sqrt{|t|}$ avec $c > 0$. Il suffit de nouveau que $\alpha > 0$ pour arriver à (8).

3) J_3 est le terme qui demande $\alpha > \frac{1}{2}$ (jusqu'ici cette condition n'a pas été utilisée). Si on applique le théorème de la moyenne à $Z \rightarrow e^{iz}$ et si on utilise $d'' \geq c \sqrt{|t|}$ il suit que :

$$|f_3| \leq \frac{\text{const.}}{\sqrt{|t|}} \left| E' |t| - K' \cdot x + \frac{\omega}{K'} \int_0^x V_L d\chi - (E'' |t| - K'' \cdot x) - \frac{\omega}{K''} \int_0^{\frac{K'' |t|}{\omega}} V_L d\chi \right|$$

Soit $x \in [\omega^{-1} K_i |t|, \omega^{-1} K_3 |t|]$.

Alors

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \left| \frac{1}{K'} \int_0^x V_L d\chi - \frac{1}{K''} \int_0^{\frac{K'' |t|}{\omega}} V_L d\chi \right| = \left| \frac{K'' - K'}{K' \cdot K''} \int_0^x V_L d\chi - \frac{1}{K''} \int_x^{\frac{K'' |t|}{\omega}} V_L d\chi \right| \leq \\ &\leq \frac{\text{const.} \cdot |t|^{-\alpha}}{(K_i - \varepsilon)^2} x^{1-\alpha} + \frac{1}{K_i - \varepsilon} \sup_{\mathbb{R}} |V_L(z)| \cdot \left| x - \frac{K'' |t|}{\omega} \right| \end{aligned}$$

Mais $c' |t| \leq x \leq c'' |t|$ le premier terme est donc majoré par $\text{const } |t|^{1-2\alpha}$.

D'autre part $\sup |V_L(Z)| \leq \text{const } |t|^{-\alpha}$ (Z parcourt les points entre x et $\frac{K'' |t|}{m}$ et $x \geq c' |t| > 0$, $\frac{K'' |t|}{m} \geq \frac{K_i - \varepsilon}{m} |t| > 0$)
et $\left| x - \frac{K'' |t|}{m} \right| = \frac{|t|}{m} \left| \frac{mx}{|t|} - K'' \right| \leq \text{const } |t|^{1-\alpha}$; le deuxième terme admet donc lui aussi une majoration du même type :

$c |t|^{1-2\alpha}$.

Ainsi : $\Delta \leq \text{const } |t|^{1-2\alpha}$.

Nous devons encore estimer $E' |t| - K' x - (E'' |t| - K'' x)$.

Les équations vérifiées par K' , K'' donnent :

$$(9a) \quad E' |t| - K' x = -E' |t| + \frac{K'}{2E'} \int_0^x V_L d\chi$$

$$(9b) \quad E'' |t| - K'' x = -E'' |t| + \frac{K''}{2E''} \int_0^{\frac{K'' |t|}{\omega}} V_L d\chi - |t| V_L \left(\frac{K'' |t|}{\omega} \right)$$

Alors :

$$\Sigma \equiv E' |t| - K' x - (E'' |t| - K'' x) = (E'' - E') |t| +$$

$$+ \left[\frac{\kappa'}{2\varepsilon'} \int_0^x V_L d\kappa - \frac{\kappa''}{2\varepsilon''} \int_0^{\frac{\kappa''|t|}{\omega}} V_L d\kappa \right] + |t| V_L \left(\frac{\kappa''|t|}{\omega} \right)$$

Le terme du milieu a déjà été estimé. Pour le premier terme on utilise à nouveau les équations (9 a,b)

$$\begin{aligned} (\varepsilon'' - \varepsilon') |t| &= \left(\frac{\kappa''|t|}{\omega} - \frac{\kappa'|t|}{\omega} \right) \frac{\kappa'' + \kappa'}{2} = \left[x + \frac{\omega}{\kappa'^2} \int_0^{\frac{\kappa''|t|}{\omega}} V_L d\kappa - \right. \\ &\quad \left. - \frac{|t|}{\kappa''} V_L \left(\frac{\kappa''|t|}{\omega} \right) - x - \frac{\omega}{\kappa'^2} \int_0^x V_L d\kappa \right] \frac{\kappa'' + \kappa'}{2} = \\ &= \left\{ \left[\frac{\omega}{\kappa'^2} \int_0^{\frac{\kappa''|t|}{\omega}} V_L d\kappa - \frac{\omega}{\kappa'^2} \int_0^x V_L d\kappa \right] - \frac{|t|}{\kappa''} V_L \left(\frac{\kappa''|t|}{\omega} \right) \right\} \frac{\kappa'' + \kappa'}{2} \end{aligned}$$

On estime le premier terme comme on l'a fait plus haut (car $|K''^2 - K'^2| = |K' - K''| |K' + K''| \leq \text{const } |t|^{-\alpha}$). Si on utilise ceci il suit que :

$$\begin{aligned} |\Sigma| &= O(|t|^{1-2\alpha}) - \frac{|t|}{\kappa''} V_L \left(\frac{\kappa''|t|}{\omega} \right) \frac{\kappa'' + \kappa'}{2} + |t| V_L \left(\frac{\kappa''|t|}{\omega} \right) = \\ &= O(|t|^{1-2\alpha}) + |t| V_L \left(\frac{\kappa''|t|}{\omega} \right) (2\kappa'')^{-1} (2\kappa'' - \kappa'' - \kappa') = \\ &= O(|t|^{1-2\alpha}) + |t| O(|t|^{-\alpha}) O(|t|^{-\alpha}) = \\ &= O(|t|^{1-2\alpha}) \end{aligned}$$

Ceci démontre (8) pour J_3 .

QED

Remarque

On peut montrer que la proposition est fausse pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$ (même si on prend $\mathbf{x}_\pm$ ou $\mathbf{x}'_\pm$ correspondant à un N très grand, le simple changement $x = \frac{K}{m}|t|$ ne suffit plus). Il suffit de calculer les comportements asymptotiques comme cela a été fait plus haut pour voir qu'ils ne peuvent plus se compenser sauf dans des cas spéciaux (la difficulté est due au fait que

l'on ne peut pas obtenir une estimation meilleure que $|K' - K''| \leq \text{const } |t|^{-\alpha}$, à cause du terme $\frac{m}{K} V_L \left(\frac{K|t|}{m} \right)$; il est clair que les autres termes de $K' - K''$ donnent $O(|t|^{-2\alpha})$ par itération).

Nous n'allons pas traiter le cas général car les calculs deviennent assez longs et il n'y a rien de nouveau dans la méthode à utiliser (on tient compte de la proposition 12' lorsque $|V(x)| \leq c(1+x)^{-\alpha}$ avec $\alpha > \frac{1}{N}$ et on utilise les modifications dépendantes du temps données par Buslaev - Matveev). Ajoutons que cette méthode ne permettra pas d'affaiblir la condition $V_L \in C^3((0, \infty))$.

CHAPITRE III : APPLICATIONS EN THEORIE DE LA DIFFUSION

Tous les objets introduits jusqu'ici et qui dépendent de ℓ auront cet indice ℓ dans ce qui va suivre. Nous supposons connues les notations de l'Annexe 4 (ne pas confondre $\mathcal{F}$, la transformée de Fourier en 3 dimensions, avec le $\mathcal{F}$ précédent qui sera noté $\mathcal{F}_\ell$).

Soient $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$ (la masse) et V une mesure réelle sur $(0, \infty)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$1) \quad \int_{(0,1)} x |V|(dx) < \infty$$

$$2) \quad \text{on peut écrire } V(dx) = V_S(dx) + V_L(x) dx$$

V_S étant une mesure à variation bornée au voisinage de l'infini et V_L une fonction à variation bornée au voisinage de l'infini telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} V_L(x) = 0$

Pour $\ell = 0, 1, 2, \dots$ on note μ_ℓ la mesure

$$\mu_\ell(dx) = \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} dx + 2m V(dx)$$

sur $(0, \infty)$ et $\mathcal{T}_\ell$ l'expression différentielle associée à μ_ℓ .

On définit l'opérateur auto-adjoint $H_\ell : D(H_\ell) \subset L^2((0, \infty)) \rightarrow L^2((0, \infty))$ de la manière suivante :

$$f \in D(H_\ell) \Leftrightarrow f \in L^2((0, \infty)) \text{ est continue ; } -f^{(2)} + \mu_\ell f \text{ est une fonction } \mathcal{T}_\ell(f) \in L^2((0, \infty)) ; \text{ et :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f \in D(H_\ell) \Rightarrow H_\ell f = \frac{1}{2m} \mathcal{T}_\ell(f)$$

(si $\ell > 0$ alors la condition $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ n'est plus nécessaire).

Soit :

$$H = U^{-1} \left[\bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-\ell}^{\ell} H_{\ell} \right] U$$

donc $H : D(H) \subset L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ est auto-adjoint. On note $\overset{0}{H}$ l'opérateur H si $V = 0$ (cf. Annexe 4).

Si $\{E^e(\Delta)\}$ est la mesure spectrale de H_e et $P_e = E^e((0, \infty))$, on note $P = U^{-1} \left[\bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-\ell}^{\ell} P_{\ell} \right] U$; une conséquence immédiate des résultats du paragraphe 4 est que la restriction de H à $PL^2(\mathbb{R}^3)$ a un spectre absolument continu (égal à $[0, \infty)$) et que la restriction de H à $(\mathcal{T}-P) L^2(\mathbb{R}^3)$ a un spectre purement discret, contenu dans $(-\infty, 0]$; le spectre singulièrement continu de H est vide.

Soit $(0, \infty) \ni \kappa \mapsto X(\kappa) \in (0, \infty)$ une fonction continue et à variation finie ayant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tel que } \kappa \geq \varepsilon \text{ et } x \geq X(\kappa) \Rightarrow \kappa^2 - 2m V_L(x) \geq \delta$$

(voir le début du paragraphe 5 pour la justification de cette condition).

On définit :

$$D(X_{\pm}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid \begin{array}{l} \text{les fonctions } (\mathcal{F}f)_{\ell m} \text{ sont à variations bornées,} \\ \text{à supports compacts dans} \\ (0, \infty) \text{ et nulles à l'exception} \\ \text{d'un nombre fini de } \ell \end{array} \right\}$$

Si $f \in D(X_{\pm})$ alors :

$$(\mathcal{H}_{\pm} f)(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{x}} \cdot e^{\pm i(\kappa x - \int_{X(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2m V_L(x)} dx)} (\mathcal{F}f)(\vec{\kappa}) d^3\kappa$$

Lemme 6

1) $D(\mathcal{K}_\pm)$ est un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R}^3)$ invariant sous $\exp(iHt)$ ($\forall t \in \mathbb{R}$)

2) $\mathcal{K}_\pm : D(\mathcal{K}_\pm) \subset L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ est bien défini

3) Si $f \in D(\mathcal{K}_\pm)$ alors :

$$\mathcal{K}_\pm f = U^{-1} \{ \mathcal{K}_\pm e f_{em} \}$$

Démonstration

1) est évident à cause du corollaire 2 de l'annexe 4 et 3) implique 2), il suffit donc de montrer 3) (on utilise la proposition 10) :

$$\begin{aligned} (U^{-1} \{ \mathcal{K}_\pm e f_{em} \}) (\vec{x}) &= \frac{1}{x} \sum_{e=0}^{\infty} \sum_{m=-e}^e (\mathcal{K}_\pm e f_{em}) (x) Y_e^m(\hat{x}) = \\ &= \frac{1}{x} \sum_{e,m} \int_0^\infty e^{\pm i\varphi(\kappa, x)} \hat{\psi}_e(x, \kappa) (\mathcal{F} f_{em}) (\kappa) d\kappa Y_e^m(\hat{x}) = \\ &= \int_0^\infty d\kappa e^{\pm i\varphi(\kappa, x)} \sum_{e,m} \frac{1}{x} \hat{\psi}_e(x, \kappa) i^e (\mathcal{F} f)_{em} (\kappa) Y_e^m(\hat{x}) = \\ &= \int_0^\infty \kappa d\kappa e^{\pm i\varphi(\kappa, x)} \sum_{e,m} \frac{i^e}{\kappa x} \hat{\psi}_e(x, \kappa) \cdot \kappa \int_{S_2} Y_e^{m*}(\hat{\kappa}) (\mathcal{F} f)(\vec{\kappa}) d\hat{\kappa} Y_e^m(\hat{x}) = \\ &= \int_0^\infty \kappa^2 d\kappa \int_{S_2} d\hat{\kappa} e^{\pm i\varphi(\kappa, x)} \sum_{e,m} \frac{i^e}{\kappa x} \hat{\psi}_e(x, \kappa) Y_e^{m*}(\hat{\kappa}) Y_e^m(\hat{x}) (\mathcal{F} f)(\vec{\kappa}) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{x}} e^{\pm i\varphi(\kappa, x)} (\mathcal{F} f)(\vec{\kappa}) d^3\kappa = (\mathcal{K}_\pm f) (\vec{x}) \end{aligned}$$

où $\varphi(\kappa, x) = \kappa x - \int_{X(\kappa)}^x \sqrt{\kappa^2 - 2m V_L(s)} ds$ (l'échange de la somme et de l'intégrale sur S_2 peut être justifié (par exemple) en tenant compte de la convergence uniforme de

$$\sum_{e,m} \frac{i^e}{\kappa x} \hat{\psi}_e(x, \kappa) Y_e^{m*}(\hat{\kappa}) Y_e^m(\hat{x})$$

lorsque κ parcourt des compacts dans $(0, \infty)$; cf. Annexe 4)

QED

Nous appellerons $\Psi_e(x, K)$ les fonctions $\Psi(x, K)$ introduites au paragraphe 4 et nous définirons la série formelle :

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm}(\vec{x}, \vec{K}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{(2\ell)^{3/2} i^{\ell}}{K x} e^{\pm i \delta_{\ell}(K)} \Psi_{\ell}(x, K) Y_{\ell}^{m*}(\hat{K}) Y_{\ell}^m(\hat{x}) \equiv \\ &\equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\ell}{2}} \frac{i^{\ell}}{K x} e^{\pm i \delta_{\ell}(K)} \Psi_{\ell}(x, K) (2\ell+1) P_{\ell}(\cos \theta). \end{aligned}$$

les déphasages $\delta_e(K)$ étant définis relativement à la fonction $K \mapsto X(K)$ (cf. paragraphe 4) et θ étant l'angle entre $\vec{K}$ et $\vec{x}$. Nous ne savons pas si cette série converge absolument dans le cas général, mais c'est vrai pour tous les cas où l'on connaît explicitement les fonctions Ψ_e (potentiel coulombien, potentiels qui décroissent à l'infini plus vite que x^{-2}). (La convergence étant absolue et uniforme lorsque $\vec{K}, \vec{x}$ parcourent des compacts dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$). Nous allons voir que la série converge dans un certain sens (les opérateurs engendrés par les termes de la série dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ convergent fortement vers les opérateurs d'onde).

Si $f \in D(\mathcal{K}_{\pm})$ on définit :

$$\begin{aligned} (\Omega_{\pm} f)(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_{\pm}(\vec{x}, \vec{K}) (\mathcal{F}f)(\vec{K}) d^3K \equiv \\ &\equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{i^{\ell}}{K x} e^{\pm i \delta_{\ell}(K)} \Psi_{\ell}(x, K) Y_{\ell}^{m*}(\hat{K}) Y_{\ell}^m(\hat{x}) (\mathcal{F}f)(\vec{K}) d^3K \end{aligned}$$

Le corollaire 2 (Annexe 4) et la définition de $D(\mathcal{K}_{\pm})$ montrent que la série n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, la définition a donc un sens.

Lemme 7

Si $f \in D(\mathcal{K}_{\pm})$ alors $\Omega_{\pm} f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et

$$\Omega_{\pm} f = U^{-1} \{ \Omega_{\pm \ell} f_{\ell m} \}$$

Donc $\Omega_{\pm}$ se prolonge en un opérateur unitaire

$\Omega_{\pm} : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow P L^2(\mathbb{R}^3)$ ayant la propriété :

$$e^{-iHt} \Omega_{\pm} = \Omega_{\pm} e^{-i\dot{H}t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} (u^{-1} \{ \Omega_{\pm} f_{em} \}) (\vec{x}) &= \frac{1}{x} \sum_{e,m} (\Omega_{\pm} f_{em}) (x) Y_e^m(\hat{x}) = \\ &= \frac{1}{x} \sum_{e,m} \int_0^{\infty} e^{\pm i \delta_e(\kappa)} \psi_e(x, \kappa) (\tilde{F}_e f_{em}) (\kappa) Y_e^m(\hat{x}) d\kappa = \\ &= \frac{1}{x} \sum_{e,m} \int_0^{\infty} e^{\pm i \delta_e(\kappa)} \psi_e(x, \kappa) i^e (\tilde{F} f)_{em}(\kappa) Y_e^m(\hat{x}) d\kappa = \\ &= \frac{1}{x} \sum_{e,m} \int_0^{\infty} e^{\pm i \delta_e(\kappa)} \psi_e(x, \kappa) i^e \cdot \kappa \int_{S_2} Y_e^{m*}(\hat{r}) (\tilde{F} f)(\vec{r}) d\hat{r} Y_e^m(\hat{x}) d\kappa \end{aligned}$$

Comme $\tilde{F}f$ est une fonction à support ^{compact} dans $\mathbb{R}^3$, il est clair que l'intégrale sur $\mathbb{R}^3$ existe

QED

Si l'on tient compte de la proposition 13 et de :

$$u e^{iHt} \chi_{\pm} e^{-i\dot{H}t} f = \{ e^{iH_e t} \chi_{\pm} e^{-i\dot{H}_e t} f_{em} \}$$

le théorème suivant est évident :

Théorème 1

Si $f \in D(\chi_{\pm})$ alors :

$$\Omega_{\pm} f = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} \chi_{\pm} e^{-i\dot{H}t} f$$

Remarque

Pour une justification "physique" du choix de $\chi_{\pm}$ voir la

proposition 12 (qui donne le comportement asymptotique de $x_{\pm} e^{-iHt} f$) et la remarque 1) qui la suit.

Proposition 15

Soient V_1, V_2 deux mesures sur $(0, \infty)$ vérifiant les hypothèses du début de ce chapitre et telles que $V_1 - V_2$ soit une mesure à variation bornée au voisinage de l'infini.

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_i > -\frac{1}{4}$ et :

$$\mu_e^i(dx) = \frac{e(e+1)}{x^2} dx + \frac{\alpha_i}{x^2} dx + 2m V_i(dx)$$

($e = 0, 1, 2, \dots$). On note H_1, H_2 les opérateurs construits dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ à l'aide de μ_e^i d'une manière similaire à H . Ils ont alors toutes les propriétés de H et :

$$\Omega_{\pm}(H_1, H_2) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_1 t} e^{-iH_2 t} P_2$$

existent et sont unitaires :

$$\Omega_{\pm}(H_1, H_2) : P_2 L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow P_1 L^2(\mathbb{R}^3)$$

Leur expression en fonction des déphasages est donnée avant la proposition 14

Démonstration

Elle est une application immédiate de la proposition 14

(car si $\alpha_i > -\frac{1}{4}$, alors $\exists e_i > -\frac{1}{2}$ t.q. $e(e+1) + \alpha_i = e_i(e_i+1)$ pour $e \geq 0$) et de l'identité

$$u e^{iH_1 t} e^{-iH_2 t} f = \{ e^{iH_1 t} e^{-iH_2 t} f_{e_i} \}$$

Dans la suite, nous montrerons que si l'on impose des conditions supplémentaires à V_L , les opérateurs $\Omega_{\pm}$ satisfont les conditions de la théorie algébrique de la diffusion (voir Amrein - Martin - Misra (1)).

Nous supposerons dans la suite que les conditions de la proposition sont satisfaites c'est-à-dire, d'après la discussion du paragraphe 5

$\exists N \geq 2$ tel que $V_L \in L^{\infty}((0, \infty)) \cap L^N((0, \infty))$.

Si $c_n = \frac{1}{n!} (-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2}) \dots (n-1-\frac{1}{2})$ et $E = \frac{K^2}{2m}$ nous définissons les δ'_e par la condition de continuité (de $K \mapsto \delta'_e(K)$) et par :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\psi_e(x, K) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left(Kx + \sum_{n=1}^{N-1} c_n \frac{K}{E^n} \int_0^x V_L^n(\lambda) d\lambda + \delta'_e(K) - \frac{eT}{2} \right) \right) = 0$$

Les $D(K'_{\pm})$ étant par définition égaux à $D(K_{\pm})$, pour $f \in D(K'_{\pm})$ on pose :

$$(\mathcal{H}'_{\pm} f)(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{i \sum_{n=1}^{N-1} c_n \frac{K}{E^n} \int_0^x V_L^n(x) dx} \cdot (\mathcal{F} f)(\vec{k}) d^3 k$$

Nous avons un analogue du lemme 6.

On définit les opérateurs $\Omega'_{\pm}$ en changeant $\delta_e(K)$ en $\delta'_e(K)$ dans la définition de $\Omega_{\pm}$; on obtient un analogue du lemme 7 et, comme nous avons remarqué avant la proposition 13', nous aurons :

$$\Omega_{\pm} = \Omega'_{\pm} h_{\pm}(\hat{H})$$

$h_{\pm}(\hat{H})$ étant un opérateur unitaire fonction de $\hat{H}$.

La proposition 13' implique alors :

Théorème 1'

Si $f \in D(K'_{\pm})$ alors :

$$\Omega'_{\pm} f = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{iHt} K'_{\pm} e^{-i\hat{H}t} f$$

Nous allons maintenant faire le lien avec la théorie algébrique dans le cas $N = 2$ (voir la remarque qui suit la proposition 14' pour le cas général).

Théorème 2

En plus des conditions imposées à V au début du chapitre, supposons que :

- 1) $V_L \in C^3([0, \infty))$
- 2) $\exists \alpha > \frac{1}{2}$ et $c < \infty$ tels que : $|V_L(x)| \leq c (1+x)^{-\alpha} \quad (\forall x \geq 0)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^i V_L^{(i)}(x) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$

On définit $D(\mathcal{K}'_{\pm})$ comme plus haut et $\mathcal{K}'_{\pm} : D(\mathcal{K}'_{\pm}) \subset L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ par :

$$(\mathcal{K}'_{\pm} f)(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} e^{\pm i\frac{m}{k} \int_0^x V_L(s) ds} \cdot (\mathcal{F}f)(\vec{k}) d^3k$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose :

$$G_t(k) = \int_0^t \left(\frac{k^2}{2m} + V_L\left(\frac{k}{m}|s|\right) \right) ds$$

$$T'_t = \exp(-i G_t(\sqrt{2m} \hat{H}^-))$$

(voir le début du paragraphe 7 pour une justification de cette définition). Les opérateurs d'onde $\Omega'_{\pm}$ sont définis pour $f \in D(\mathcal{K}'_{\pm})$ par :

$$(\Omega'_{\pm} f)(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \psi'_{\pm}(\vec{x}, \vec{k}) (\mathcal{F}f)(\vec{k}) d^3k$$

(voir ce qui précède le lemme 7 pour cette définition).

Alors les opérateurs

$$\Omega'_{\pm} : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow P L^2(\mathbb{R}^3)$$

sont unitaires et pour $f \in D(\mathcal{H}'_{\pm})$

$$\Omega_{\pm} f = \lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{iHt} T'_t f = \lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{iHt} \mathcal{K}'_{\pm} e^{-iH^0 t}$$

Ce théorème est une conséquence immédiate de la proposition 14' et du théorème 1'. Remarquons seulement que $\Psi'_{\pm}(\vec{x}, \vec{K})$ est obtenue en changeant $\delta_e(K)$ en $\delta'_e(K)$ dans la définition de $\Psi_{\pm}(\vec{x}, \vec{K})$.

ANNEXE 1

EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES GENERALISEES

Soit $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ (avec $a > -\infty, b \leq +\infty$); par "mesure sur I" nous sous-entendons toujours une mesure borélienne, régulière sur I à valeurs complexes. Nous faisons une distinction entre variation "finie" et variation "bornée" (pour les mesures et les fonctions) : une mesure (ou une fonction) est à variation finie (resp. bornée) si elle est à variation bornée sur tout intervalle compact $[\alpha, \beta] \subset I$ (resp si la borne supérieure de ses variations sur des intervalles $[\alpha, \beta] \subset I$ est finie). Le fait que les mesures soient complexes implique qu'elles seront toujours à variation finie.

Rappelons que toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ à variation finie engendre une mesure μ_f sur I par la formule $\mu_f([\alpha, \beta]) = f(\beta+0) - f(\alpha-0)$; remarquons que μ_f est complètement définie par une des fonctions $x \rightarrow f(x+0)$ (nous avons $f(x+0) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \geq x}} f(y+0)$). Réciproquement, si μ est une mesure sur I il existe alors $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ à variation finie telle que $\mu = \mu_f$; f est uniquement déterminée (à une constante additive près) dans ses points de continuité; si l'on modifie f dans ses points de discontinuité et si la nouvelle fonction est encore à variation finie, elle engendre la même mesure. (Voir Dunford - Schwartz (I) III. 1, III. 5, IV. 12 et N. Dinculeanu (1) paragraphe 14).

Nous notons $|\mu|$ la variation de la mesure μ (c'est-à-dire la plus petite mesure positive sur I telle que $|\mu(\Delta)| \leq |\mu|(\Delta)$ pour tout borélien $\Delta \subset I$).

Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ sont boréliennes et si g est à variation finie, on définit l'intégrale de f par rapport à g comme l'intégrale

de f par rapport à μ_g (si elle existe); nous allons la noter $\int f(s) \mu_g(ds)$ ou $\int f(s) dg(s)$; les intégrales seront toujours de type Lebesgue - Stieltjes (L-S); si l'intégrale existe au sens de Riemann - Stieltjes, nous dirons que f est R-S intégrable par rapport à g (sur un intervalle). Si f est borélienne (resp. continue) et bornée, elle est L-S (resp. R-S) intégrable par rapport à g sur tout $[\alpha, \beta] \subset I$.

La fonction f sera ^{dite} localement intégrable par rapport à g sur I si elle est (L-S) intégrable par rapport à g sur tout intervalle compact $[\alpha, \beta] \subset I$.

Si f est L-S intégrable par rapport à g sur $[\alpha, \beta] \subset I$ on note aussi

$$\int_{[\alpha, \beta]} f(s) \mu_g(ds) = \int_{\alpha-0}^{\beta+0} f(s) \mu_g(ds) = \int_{\alpha-0}^{\beta+0} f(s) dg(s)$$

(resp. $[\alpha, \beta]$);
Si l'intégrale est prise sur $(\alpha, \beta]$; (α, β) on change les limites d'intégration en $\alpha + 0$ et $\beta + 0$ (resp. $\alpha - 0$ et $\beta - 0$; $\alpha + 0$ et $\beta - 0$). On pose aussi $(\alpha \leq \beta)$

$$\int_{\beta+0}^{\alpha-0} f(s) dg(s) = - \int_{\alpha-0}^{\beta+0} f(s) dg(s)$$

et des expressions similaires pour les autres cas.

Si f est de plus R-S-intégrable par rapport à g sur un intervalle strictement plus grand que $[\alpha, \beta]$ on voit facilement que :

$$\int_{\alpha-0}^{\beta+0} f(s) dg(s) = \lim_{\substack{\beta' \rightarrow \beta; \beta' > \beta \\ \alpha' \rightarrow \alpha; \alpha' < \alpha}} \int_{\alpha'}^{\beta'} f(s) dg(s)$$

l'intégrale de droite étant faite au sens de Riemann - Stieltjes (elle dépend donc de la valeur de g aux points α', β' ; si g est discontinue dans ces points, alors $\int_{\alpha'}^{\beta'} f(s) d g (s)$ ne peut pas être définie qu'en termes de μ_g).

Nous utiliserons souvent la remarque (évidente) suivante :

soit $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue sur I).

Rappelons que la dérivée à droite (resp. à gauche) de F en x est définie par

$$F^{\pm}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \pm 0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon}$$

lorsque la limite existe.

Si la dérivée (Radon - Nikodym) de F est égale (Lebesgue) -presque partout à une fonction réglée f (c'est-à-dire $f(x \pm 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \pm 0} f(x \pm \varepsilon)$ existent $\forall x$) alors F est dérivable à droite et à gauche en chaque $x \in I$ et :

$$F^{\pm}(x) = f(x \pm 0)$$

(Démonstration) : pour $\varepsilon > 0$ nous écrivons

$$\left| \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} - f(x+0) \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} (f(t) - f(x+0)) dt \right| \leq$$

$$\leq \sup_{x \leq t \leq x+\varepsilon} |f(t) - f(x+0)| \rightarrow 0 \text{ pour } \varepsilon \rightarrow +0$$

QED)

On note $\mathcal{D}(I)$ l'espace des fonctions complexes de classe C^{∞} à support compact dans I muni de la topologie habituelle

(Schwartz) et $\mathcal{D}'(I)$ l'ensemble des applications linéaires continues $\mathcal{D}(I) \rightarrow \mathbb{C}$.

L^1_{loc} (I) sera l'ensemble des applications boréliennes $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ localement intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue.

On dit d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(I)$ qu'elle est une fonction (resp. une mesure) s'il existe $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ (resp. μ une mesure sur I) t. q. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$:

$$T(\varphi) = \int \varphi(x) f(x) dx \quad (\text{resp } T(\varphi) = \int \varphi(x) \mu(dx)).$$

Dans ce cas f est unique (Lebesgue)-presque partout (resp. μ est unique)

Dans Schwartz (1) pages 53-54 on montre :

Proposition 1

Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$

- 1) La dérivée au sens des distributions $T^{(1)}$ de T est une mesure si et seulement si T est une fonction (équivalente à une fonction) à variation finie f sur I . Dans ce cas $T^{(1)}$ coïncide avec la mesure engendrée par f .
- 2) La dérivée au sens des distributions $T^{(1)}$ de T est une fonction si et seulement si T est une fonction (équivalente à une fonction) absolument continue f sur I . Dans ce cas $T^{(1)}$ est la fonction f' (dérivée habituelle de f ,

définie p.p.)

Nous allons toujours désigner la n -ième dérivée au sens des distributions de $T \in \mathcal{D}'(I)$ par $T^{(n)}$. Donc si $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$, alors $f^{(n)} \in \mathcal{D}'(I)$ a un sens. D'autre part f peut être dérivable (presque partout) au sens habituel : on note $f', f'', \dots$ ces dérivées. De même f^+, f^- seront toujours les dérivées à droite et à gauche de f .

Proposition 2

Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ telle que $f^{(2)}$ soit une mesure; alors f est équivalente (Lebesgue) à une fonction, également notée f , absolument continue et ayant une dérivée à droite et à gauche en chaque $x \in I$.

De plus :

1) f^+ (resp. f^-) est à variation finie et continue à droite (resp. à gauche) dans I

2) $\forall x \in (a, b)$:

$$f^+(x+0) = f^-(x+0) = f^+(x)$$

$$f^+(x-0) = f^-(x-0) = f^-(x)$$

En particulier, f est dérivable en $x \in I$ si et seulement si f^+ (ou f^-) est continue en x .

La mesure $f^{(2)}$ coïncide avec la mesure engendrée par f^+ (ou f^-).

Démonstration

Il suffit de considérer $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Comme $f^{(2)}$ est une mesure, $f^{(1)}$ est une fonction équivalente à une fonction à variation finie g (donc g est réglée, c'est-à-dire $g(x \pm 0)$ existe $\forall x$), f est donc

une fonction absolument continue et $f'(x) = g(x)$ (p.p.). Une remarque faite auparavant montre que $f^\pm(x) = g(x \pm 0)$ existent $\forall x \in I$, ce qui implique la première partie de l'énoncé et le point 1) (car par exemple $x \rightarrow g(x+0)$ est continue à droite).

Nous utilisons maintenant un théorème de Dini (cf. Saks (I) ch. VI, paragraphe 7; l'idée d'utiliser ce théorème est due à I.S. Kac (1)) : si $x \in I$, $\varepsilon > 0$, $x + \varepsilon \in I$ et $x_1, x_2 \in]x, x + \varepsilon[$ alors :

$$\inf_{x < y < x + \varepsilon} f^+(y) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \sup_{x < y < x + \varepsilon} f^+(y)$$

Donc $\forall z \in]x, x + \varepsilon[$:

$$\inf_{x < y < x + \varepsilon} f^+(y) \leq f^-(z) \leq \sup_{x < y < x + \varepsilon} f^+(y)$$

Comme f^+ est continue à droite en x , pour $\varepsilon \rightarrow +0$ on obtient :

$$f^+(x) \leq f^-(x+0) \leq f^+(x)$$

QED

Nous aurons encore besoin d'une formule d'intégration par parties.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ à variation finie. Donc $fg : I \rightarrow \mathbb{C}$ est à variation finie et engendre une mesure $(fg)^{(1)}$ (qui coïncide avec la dérivée au sens des distributions de $f \cdot g \in L^1_{loc}(I)$). Nous voulons calculer $(fg)^{(1)}$ en termes de $f^{(1)}$ et $g^{(1)}$ (donc une généralisation de la dérivation habituelle d'un produit).

Avec la même méthode que Saks (I) ch. III, paragraphe 14 on montre que si $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \leq \beta$ alors :

$$\int_{\alpha-0}^{\beta+0} f(x-0) dg(x) + \int_{\alpha-0}^{\beta+0} g(x+0) df(x) = f(\beta+0)g(\beta+0) - f(\alpha-0)g(\alpha-0)$$

(intégrales de type L-S, si une des fonctions est R-S intégrable par rapport à l'autre, la formule est évidente). On introduit la notation $f_{\pm 0}(x) = f(x \pm 0)$, donc, avec $\mu_{fg}([\alpha, \beta]) \equiv (fg)^{(1)}([\alpha, \beta]) = f(\beta+0)g(\beta+0) - f(\alpha-0)g(\alpha-0)$ et avec le théorème du prolongement des mesures, on obtient :

$$(fg)^{(1)} = f^{(1)} g_{+0} + f_{-0} g^{(1)}$$

(Remarque : De façon générale, si f est une fonction localement intégrable par rapport à une mesure μ , on note μf ou $f \mu$ la mesure définie par $(\mu f)([\alpha, \beta]) = \int_{[\alpha, \beta]} f(s) \mu(ds)$ et on l'appelle mesure de base μ et de densité f).^[α,β]

La symétrie entre f et g implique aussi la formule

$$(fg)^{(1)} = f^{(1)} g_{-0} + f_{+0} g^{(1)}, \text{ donc } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ nous avons :}$$

$$(fg)^{(1)} = f^{(1)} [\lambda g_{-0} + (1-\lambda) g_{+0}] + [(1-\lambda) f_{-0} + \lambda f_{+0}] g^{(1)}$$

Si on suit la même méthode que Saks (1) ch. III, paragraphe 14 on obtient alors :

Proposition 3

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ à variation finie qui ont la propriété suivante : $\exists \lambda \in [0, 1]$ tel que pour tout $x \in I$ une des conditions suivantes est vérifiée :

$$1) f(x) = \lambda f(x-0) + (1-\lambda) f(x+0) \text{ et } g(x) = (1-\lambda) g(x-0) + \lambda g_{\cdot}(x+0)$$

$$2) f \text{ ou } g \text{ est continue en } x$$

Alors :

$$(fg)^{(1)} = f^{(1)} g + fg^{(1)}$$

Remarque :

Appliquée à des intervalles, cette formule est la formule usuelle d'intégration par parties :

$$\varphi(\beta \pm 0) g(\beta \pm 0) - \varphi(\alpha \pm 0) g(\alpha \pm 0) = \int_{\alpha \pm 0}^{\beta \pm 0} g(x) d\varphi(x) + \int_{\alpha \pm 0}^{\beta \pm 0} \varphi(x) dg(x)$$

Remarquons que si g est à variation finie et discontinue on peut alors appliquer la proposition 3 (avec $f = g$) seulement si $\lambda = 1 - \lambda$, donc $\lambda = \frac{1}{2}$. Donc, si nous avons $g(x) = \frac{1}{2} (g(x-0) + \overbrace{g(x+0)}^{+g(x+0)})$ pour tout $x \in I$, alors $(g^2)^{(1)} = 2 g g^{(1)}$ (sinon, la formule n'est plus vraie). Cette formule est généralisée dans la proposition suivante

Proposition 4

Soient $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ à variation finie et $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ continûment différentiable, où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle qui contient $g(I)$. Supposons que pour tout compact $[\alpha, \beta] \subset I$, f' soit bornée sur le plus petit intervalle J_0 qui contient $g([\alpha, \beta])$. Alors $f \circ g : I$ est à variation finie.

Soit $\frac{df}{dg} : I \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\frac{df}{dg}(s) = \begin{cases} f'(g(s)) & \text{si } g \text{ est continue en } s \\ \frac{f(g(s+0)) - f(g(s-0))}{g(s+0) - g(s-0)} & \text{si } g \text{ n'est pas continue en } s \end{cases}$$

Alors $\frac{df}{dg}$ est $g^{(1)}$ -localement intégrable et : $(f \circ g)^{(1)} = \frac{df}{dg} g^{(1)}$

Nous n'allons pas donner les détails de la démonstration de cette

proposition (lorsque g est continue, la démonstration est évidente si on utilise des sommes de Riemann - Stieltjes; dans le cas général, on utilise le fait que pour toute mesure μ nous avons $|\frac{d\mu}{d|\mu|}(x)| = 1$ ($|\mu|$ - p.p.) (où $\frac{d\mu}{d|\mu|}$ est la dérivée de Radon - Nikodym) et de plus le lemme de la page 146 de C. Foias (1)). En effet nous n'aurons besoin que du corollaire suivant (qui peut être facilement démontré directement; cf. I.S. Kac (1), note en bas de la page 233)

Corollaire

- 1) Si $g : I \rightarrow (0, \infty)$ est croissante et continue à gauche alors $\forall n \geq 0 : (g^{n+1})^{(1)} \geq (n+1) g^n g^{(1)}$
- 2) Si $g : I \rightarrow (0, \infty)$ est décroissante et continue à droite alors $\forall n \geq 0 : (g^{n+1})^{(1)} \leq (n+1) g^n g^{(1)}$

Démonstration

La proposition précédente montre que $(g^{n+1})^{(1)} = \chi g^{(1)}$ où

$$\chi(s) = \begin{cases} (n+1) g^n(s) & \text{si } g \text{ est continue en } s \\ \frac{g^{n+1}(s+0) - g^{n+1}(s-0)}{g(s+0) - g(s-0)} & \text{si } g \text{ n'est pas continue} \end{cases}$$

(on prend $f(x) = x^{n+1}$, $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$). Le théorème de la moyenne appliquée à $x \mapsto x^{n+1}$ sur l'intervalle $[g(s-0), g(s+0)]$ (resp. $[g(s+0), g(s-0)]$) donne :

$$g^{n+1}(s+0) - g^{n+1}(s-0) = (n+1) \xi^n (g(s+0) - g(s-0))$$

pour un certain $\xi \in [g(s-0), g(s+0)]$ (resp. $\xi \in [g(s+0), g(s-0)]$)

Donc :

$$\frac{g^{n+1}(s+0) - g^{n+1}(s-0)}{g(s+0) - g(s-0)} = (n+1) \xi^n$$

Dans le premier cas, nous avons $\xi \geq g(s-0)$ et g est continue à gauche, donc $\xi \geq g(s)$. Dans le deuxième cas, $\xi \geq g(s+0)$ et g est continue à droite, donc $\xi \geq g(s)$. Il suit que dans les deux cas, $\chi(s) \geq (n+1) g^n(s) \quad \forall s \in I$. Dans le premier cas, $g^{(1)}$ est une ^{mesure} positive ce qui entraîne $\chi_{g^{(1)}} \geq (n+1) g^n g^{(1)}$. Dans le deuxième cas, $g^{(1)}$ est une mesure négative et entraîne $\chi_{g^{(1)}} \leq (n+1) g^n g^{(1)}$.

QED

Soient μ et ν deux mesures complexes sur I . Nous dirons que

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est solution de l'équation :

$$-f^{(2)} + \mu f = \nu$$

si :

1) f est continue

2) on a la relation précédente au sens des distributions.

(la condition 1) implique que μf est une mesure; la condition 2) dit que $f^{(2)}$ est aussi une mesure, égale à $-\nu + \mu f$).

On remarque que f est solution de l'équation précédente si et seulement si :

I f est continue

II $f^+(x)$ existe $\forall x \in I$

III $\forall c, x \in I$ nous avons :

$$f^+(x) - f^+(c) = \int_c^{x+0} f(\gamma) \mu(d\gamma) - \int_c^{x+0} \nu(d\gamma)$$

Démonstration

Ces conditions sont nécessaires en vertu de la proposition 2.

Réciproquement : III implique que f^+ est continue à droite, à

variation finie et engendre la mesure $\mu f - \nu$. En particulier f^+ est localement bornée, donc de Dieudonné (1) (8.5 problème 2) il suit que f est localement Lipschitz dans I . f sera alors absolument continue et $f'(x) = f^+(x)$ (p.p.), c'est-à-dire $f^{(1)}$ est une fonction f^+ à variation finie, donc $f^{(2)}$ une mesure et $f^{(2)} = \mu f - \nu$

QED

Cette remarque et la proposition 2 montrent que notre définition de la notion de solution coïncide avec celle utilisée par I.S. Kac (1) paragraphe 7 : il suffit de noter Q une fonction à variation finie qui engendre la mesure μ et M une fonction croissante qui engendre une mesure positive ν_0 par rapport à laquelle ν est absolument continue ($\nu_0 = |\nu|$ par exemple); alors la dérivée de Radon - Nikodym

$$\frac{d\nu}{d\nu_0}(x) \equiv - \frac{d(f^{(2)} - \mu f)}{d\nu_0}(x) \equiv - \frac{d}{dM(x)} \left(f^+(x) - \int_{c+x}^{x+0} f(s) dQ(s) \right)$$

est appelée $\ell_{M,Q}(f)$ par Kac.

Il est facile de démontrer les affirmations suivantes (c'est fait par Kac dans un cas particulier; en fait la proposition 5 est une simple application du théorème de Fubini et la proposition 6 de la méthode des approximations successives).

Proposition 5

Soient $c \in I$ et $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. f est alors solution de l'éq. $-f^{(2)} + \mu f = \nu$ et elle vérifie les conditions initiales

$$\begin{cases} f(c) = c_1 \\ f^+(c) = c_2 \end{cases}$$

si et seulement si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et $\forall x \in I$:

$$f(x) = c_1 + c_2(x-c) + \int_{c+0}^{x+0} (x-s) f(s) \mu(ds) - \int_{c+0}^{x+0} (x-s) \nu(ds)$$

Proposition 6

Soient $c \in I$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ et μ, ν deux mesures complexes sur I . Alors, le système :

$$\begin{cases} -f^{(2)} + \mu f = \nu \\ f(c) = c_1; f^+(c) = c_2 \end{cases}$$

a une solution unique $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ sont continues et dérivables à droite en chaque $x \in I$, on définit leurs Wronskien par :

$$W(f, g)(x) = f(x) g^+(x) - f^+(x) g(x)$$

Proposition 7

Soient μ une mesure complexe sur I et $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ continues. On définit $\tau(f) = -f^{(2)} + \mu f$ et $\tau(g)$ de la même manière. Si $\tau(f)$ et $\tau(g)$ sont des mesures (donc $f^{(2)}$ et $g^{(2)}$ le sont aussi et $W(f, g)$ a au sens) alors $\forall [x, y] \subset I$:

$$\int_{x+0}^{y+0} \tau(f)(ds) g(s) - \int_{x+0}^{y+0} f(s) \tau(g)(ds) = W(f, g)(y) - W(f, g)(x)$$

Démonstration

$f^{(2)} = \mu f - \tau(f)$ et $g^{(2)}$ seront des mesures. La proposition 3 (et 2) entraîne que $(f^+g)^{(1)} = f^{(2)}g + f^+g^{(1)}$. Si l'on tient compte de la continuité à droite de f^+ et si l'on intègre sur $(x,y]$ on obtient :

$$f^+(y)g(y) - f^+(x)g(x) = \int_{x+0}^{y+0} g(\lambda) f^{(2)}(d\lambda) + \int_x^y f^+(\lambda) g^+(\lambda) d\lambda$$

ou :

$$- \int_{x+0}^{y+0} g(\lambda) f^{(2)}(d\lambda) = -f^+(y)g(y) + f^+(x)g(x) + \int_x^y f^+(\lambda) g^+(\lambda) d\lambda$$

On obtient une identité similaire si on échange le rôle de f et g . Si on soustrait ces deux relations, il vient

$$\int_{x+0}^{y+0} (-f^{(2)})(d\lambda) g(\lambda) - \int_{x+0}^{y+0} f(\lambda) (-g^{(2)})(d\lambda) = W(f,g)(y) - W(f,g)(x)$$

De plus :

$$\int_{x+0}^{y+0} (f\mu)(d\lambda) g(\lambda) = \int_{x+0}^{y+0} f(\lambda) (g\mu)(d\lambda)$$

QED

Corollaire

Soient μ une mesure complexe sur I et f_1, f_2 des solutions de l'équation $-f^{(2)} + \mu f = 0$. Alors, $W(f_1, f_2)$ est une constante et :

$$W(f_1, f_2) \equiv f_1(x) f_2^+(x) - f_1^+(x) f_2(x) \equiv f_1(x) f_2^-(x) - f_1^-(x) f_2(x) \\ (\forall x \in I).$$

De plus :

1) $W(f_1, f_2) \neq 0 \iff f_1$ et f_2 sont linéairement indépendantes sur I .

2) L'équation $-f^{(2)} + \mu f = 0$ a exactement deux solutions linéairement indépendantes sur I .

Proposition 8

Soient μ, ν des mesures complexes sur I et f_1, f_2 des solutions linéairement indépendantes de $-f^{(2)} + \mu f = 0$.

Alors, l'unique solution du système de la proposition 6 est

$$(10) \quad f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \int_{c+0}^{x+0} \frac{f_1(x) f_2(\gamma) - f_1(\gamma) f_2(x)}{W(f_1, f_2)} \nu(d\gamma)$$

où $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ sont solutions de : $a_1 f_1(c) + a_2 f_2(c) = c_1$ et $a_1 f_1^+(c) + a_2 f_2^+(c) = c_2$

De plus :

$$(11) \quad f^+(x) = a_1 f_1^+(x) + a_2 f_2^+(x) + \int_{c+0}^{x+0} \frac{f_1^+(x) f_2(\gamma) - f_1(\gamma) f_2^+(x)}{W(f_1, f_2)} \nu(d\gamma)$$

Démonstration

L'unicité de la solution montre qu'il suffit que f , définie par (10)

soit solution de $-f^{(2)} + \mu f = v$ et que f^+ soit donnée par (11).

Soient :

$$g_i(x) = \int_{c \rightarrow 0}^{x \rightarrow 0} \frac{f_i(s)}{w} v(ds)$$

Il est clair qu'il suffit de considérer $a_1 = a_2 = 0$ ($\Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$) donc $f = f_1 g_2 - f_2 g_1$; comme les f_i sont continues et les g_i à variation finie, la proposition 3 donne : $f^{(1)} = f_1^{(1)} g_2 + f_1 g_2^{(1)} - f_2^{(1)} g_1 - f_2 g_1^{(1)}$. Mais $g_i^{(1)} = \frac{1}{w} f_i v$, donc $f_i g_j^{(1)} = f_j g_i^{(1)}$, c'est-à-dire $f^{(1)} = f_1^{(1)} g_2 - f_2^{(1)} g_1$. Les $f_i^{(1)}$ étant des fonctions (équivalentes à des fonctions) à variation finie, $f^{(1)}$ sera une fonction à variation finie, donc $f^{(2)}$ une mesure. La proposition 2 et la continuité à droite des premières dérivées donne : $\forall x \in I$:

$$(12) f^+(x) = f_1^+(x) g_2(x) - f_2^+(x) g_1(x)$$

(voir une remarque faite dans ce qui précède la proposition 1).

Ceci démontre (11). Avec la formule déduite avant la proposition 3 (où $\lambda = 0$) on obtient de l'équation (12) :

$$f^{(2)} = f_1^{(2)} g_{2+0} + f_{1-0}^+ g_2^{(1)} - f_2^{(2)} g_{1+0} - f_{2-0}^+ g_1^{(1)}$$

Mais g_1, g_2 sont continues à droite $g_{i+0} = g_i$; de même $f_i^{(2)} = \mu f_i$ et $g_i^{(1)} = \frac{1}{w} f_i v$. Donc :

$$\begin{aligned} f^{(2)} &= \mu f_1 g_2 - \mu f_2 g_1 + \frac{1}{w} (f_{1-0}^+ f_2 - f_{2-0}^+ f_1) v = \\ &= \mu f + \frac{1}{w} (f_{1-0}^+ f_2 - f_{2-0}^+ f_1) v \end{aligned}$$

D'autre part :

$$(f_{1-0}^+ f_2 - f_{2-0}^+ f_1)(x) = f_1^+(x-0) f_2(x) - f_2^+(x-0) f_1(x) =$$

$$f_1^-(x) f_2(x) - f_2^-(x) f_1(x) = -w(f_1, f_2)$$

où l'on a utilisé la proposition 2 et le corollaire précédent.

Donc :

$$f^{(2)} = \mu f - v.$$

QED

La proposition suivante est l'analogue de l'affirmation (IV bis) page 266 de A. Wintner. Nous nous bornons à prouver que sa démonstration reste valable dans le cas envisagé ici.

Proposition 9

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures complexes sur I telles que $\mu_1 - \mu_2$ est une fonction bornée au voisinage de b ($I = (a, b)$; au voisinage de b , $\mu_1 - \mu_2$ est donc égale, au sens des distributions à une fonction essentiellement bornée).

Si toutes les solutions de $-f^{(2)} + \mu_1 f = 0$ sont de carré Lebesgue - intégrable au voisinage de b , toutes les solutions de $-f^{(2)} + \mu_2 f = 0$ ont alors la même propriété.

Démonstration

Soient u et v solutions de $-f^{(2)} + \mu_1 f = 0$ t.q. $W(u, v) = 1$ et g une solution de $-g^{(2)} + \mu_2 g = 0$. On pose :

$$\begin{aligned}\alpha &= gv^+ - g^+v \\ \beta &= -gu^+ + g^+u.\end{aligned}$$

α et β sont alors des fonctions à variation finie, continues à droite sur I et continues au voisinage de b .

$$\begin{aligned}(\text{par exemple : } \alpha(x) - \alpha(x-0) &= g(x) (v^+(x) - v^+(x-0)) - (g^+(x) - \\ &- g^+(x-0)) v(x) = g(x) v^{(2)}(x) - g^{(2)}(x) v(x) = g(x) v(x) \mu_1(\{x\}) \\ &- g(x) \mu_2(\{x\}) v(x) = g(x) v(x) (\mu_1 - \mu_2)(\{x\}) = 0 \text{ si } x\end{aligned}$$

est suffisamment près de b , car $\mu_1 - \mu_2$, étant une fonction bornée au voisinage de b , sera aussi une mesure diffuse dans ce voisinage, c'est-à-dire $(\mu_1 - \mu_2)(\{x\}) = 0$ pour tout point x .

De plus la condition $w(u,v) = 1$ implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} g = \alpha u + \beta v \\ g^+ = \alpha u^+ + \beta v^+ \end{array} \right. \quad \text{sur } I$$

Il suffit donc de montrer que α et β sont bornées au voisinage de b . La proposition 3 donne :

$$\alpha^{(1)} = g^{(1)} v^+ + g v^{(2)} - g^+ v^{(1)}$$

Et $g^{(1)} v^+ = g^+ v^+ = g^+ v^{(1)}$ en tant que distributions, donc
 $\alpha^{(1)} = g v^{(2)} - g^{(2)} v = g v \mu_1 - g \mu_2 v = g v (\mu_1 - \mu_2)$.

D'une manière similaire :

$$\beta^{(1)} = -g u (\mu_1 - \mu_2)$$

On introduit la fonction : $r = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{\frac{1}{2}}$. Comme α et β sont continues au voisinage de b , nous aurons (avec la proposition 4, qui est triviale dans ce cas) :

$$(\ln \chi)^{''} = \frac{1}{2\chi^2} (\chi^2)^{''} = \frac{\alpha^{''} \alpha^* + \alpha \alpha^{''*} + \beta^{''} \beta^* + \beta \beta^{''*}}{2\chi^2}$$

On utilise les expressions précédentes de $\alpha^{(1)}$ et $\beta^{(1)}$ en tenant compte du fait que $g = \alpha u + \beta v$ et aussi des relations $|\mu_1^* - \mu_2^*| = |\mu_1 - \mu_2|$ et $|g v (\mu_1 - \mu_2)| = |g v| |\mu_1 - \mu_2|$, par exemple, (voir Dinculeanu (1) paragraphe 9 théorème 6) pour obtenir par un calcul simple :

$$|(\ln \chi)^{''}| \leq (|u|^2 + |v|^2) |\mu_1 - \mu_2|$$

Pour $a < c < b$, et c suffisamment grand, nous avons donc :

$$\int_{(c,b)} |(\ln x)^{(1)}| (ds) \leq \int_{(c,b)} (|u|^2 + |v|^2) |\mu_1 - \mu_2| (ds) =$$

$$= \int_c^b (|u(s)|^2 + |v(s)|^2) \frac{d|\mu_1 - \mu_2|}{ds} (s) \cdot ds < \infty$$

c'est-à-dire $\ln r$ est une fonction à variation bornée au voisinage de b , et donc $r = e^{\ln r}$ l'est aussi. En particulier r est bornée et de même α et β .

QED

ANNEXE 2

OPERATEURS ENGENDRES PAR UNE EXPRESSION DIFFERENTIELLE GENERALISEE

Soient $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ et $L^2(I)$ l'espace de Hilbert des fonctions (des "classes de fonctions") $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur I ; le produit scalaire est $\langle f, g \rangle = \int f^*(s) g(s) ds$. Si on parle de fonctions intégrables, de mesures absolument continues, presque partout, etc. sans spécifier la mesure par rapport à laquelle sont valables ces propriétés, on sous-entend que c'est par rapport à celle de Lebesgue, que l'on note ds (ou dx , etc).

Soit μ une mesure réelle sur I . Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, alors $-f^{(2)} + \mu f \in \mathcal{D}'(I)$ est bien définie. Si cette distribution est une fonction, nous allons noter $\tau(f)$ (la classe d'équivalence de) cette fonction. Dans ce cas on peut aussi considérer $-f^{(2)} + \mu f$ comme une mesure absolument continue, et on peut alors aussi noter :

$$\tau(f) = \frac{d}{ds} (-f^{(2)} + \mu f)$$

(Remarque : en théorie des distributions, on identifie en général la fonction $\tau(f)$ avec la distribution $-f^{(2)} + \mu f$, donc on pourrait tout aussi bien écrire $\tau(f) = -f^{(2)} + \mu f$. L'avantage de l'écriture précédente n'apparaît que lorsqu'à la place de la mesure de Lebesgue sur I , on prend une autre mesure positive ν (donc $L^2_\nu(I)$ au lieu de $L^2(I)$). Alors $\tau(f)$ est la dérivée de Radon - Nikodym de la mesure $-f^{(2)} + \mu f$ par rapport à ν , lorsque $-f^{(2)} + \mu f$ est ν -absolument continue).

Chaque fois que $\tau(f)$ a un sens, nous avons donc $\tau(f) \in L^1_{loc}(I)$.

Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ sont continues et dérivables à droite en chaque $x \in I$, on définit :

$$\{f, g\}(x) = W(f^*, g)(x) = f^*(x) g'(x) - f^{**}(x) g(x)$$

Si les limites existent, on pose :

$$\{f, g\}(a) = \lim_{x \rightarrow a} \{f, g\}(x)$$

$$\{f, g\}(b) = \lim_{x \rightarrow b} \{f, g\}(x)$$

$$\{f, g\} = \{f, g\}(b) - \{f, g\}(a)$$

Comme μ est réelle nous avons toujours $\tau(f^*) = \tau(f)^*$ la proposition (Annexe 1) donne alors l'identité de Lagrange :

soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ continues t.q. $-f^{(2)} + \mu f$ et $-g^{(2)} + \mu g$ sont des fonctions. Pour tout intervalle compact $[x, y] \subset I$ nous avons alors :

$$\int_x^y \tau(f)^*(\lambda) g(\lambda) d\lambda - \int_x^y f^*(\lambda) \tau(g)(\lambda) d\lambda = \{f, g\}(y) - \{f, g\}(x)$$

Par la suite, nous allons définir des opérateurs dans $L^2(I)$ en partant de τ . Nous suivons la méthode de Stone (1) chapitre X paragraphe 3 et nous n'indiquons que les changements qu'il faut faire dans ses démonstrations.

On appellera une classe $f \in L^2(I)$ continue si elle contient une fonction continue; cette fonction, évidemment unique, sera

également notée f .

On définit alors un opérateur $T^* : D(T^*) \subset L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ par :
 $f \in D(T^*) \iff f \in L^2(I)$ est continue et $-f^{(2)} + \mu f$ est une
fonction $\tau(f) \in L^2(I)$; $f \in D(T^*) \Rightarrow T^* f = \tau(f)$

On définit également $T : D(T) \subset L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ par :

$$D(T) = \{ f \in D(T^*) \mid \{f, g\} = 0 \quad \forall g \in D(T^*) \}$$

$$T = T^*|_{D(T)}$$

Donc $T \subset T^*$; on appellera T (resp. T^*) l'opérateur minimal (resp. maximal) engendré par τ dans $L^2(I)$.

(Remarque : nos notations ne coïncident pas avec celles de Stone, mais il est facile de faire le lien (voir son théorème 10.11).
D'autre part, ce que nous appelons opérateur minimal est la fermeture de l'opérateur minimal défini dans T. Kat^o (1) ou Dunford - Schwartz (2) chapitre XII)

Proposition 1

Si $f, g \in D(T^*)$, alors $\{f, g\}$ (a) et $\{f, g\}$ (b) existent et :

$$\langle T^* f, g \rangle - \langle f, T^* g \rangle = \{f, g\}$$

Démonstration

On applique l'identité de Lagrange à f, g sur $[x, y] \subset I$ et on tient compte du fait que $\tau(f)^* g \in L^1(I)$, $f^* \tau(g) \in L^1(I)$ on peut donc faire tendre x vers a et y vers b .

QED

Proposition 2

Soient u_1 et u_2 deux solutions réelles de $-u^{(2)} + \mu u = 0$
sur I t.q. $w(u_1, u_2) = 1$
Soit $\tilde{f} \in L^2(I)$ t.q.

$$1) \tilde{f}(x) = 0 \quad \text{p.p. en dehors d'un compact } [\alpha, \beta] \subset I$$

$$2) \int_{\alpha}^{\beta} u_1(s) \tilde{f}(s) ds = 0$$

Alors, $\exists f \in D(T)$ telle que $Tf = \tilde{f}$ et $f(x) = f^+(x) = 0$
pour $x \leq \alpha$ et $x \geq \beta$.

Démonstration

Dans la proposition 8 (de l'Annexe 1) on prend $c = \alpha$, $f(c) = c_1 = 0$
 $f^+(c) = c_2 = 0$, $v(ds) = \tilde{f}(s) ds$ et $u_i = f_i$.

Donc

$$f(x) = \int_{\alpha}^x (u_1(s) u_2(x) - u_1(x) u_2(s)) \tilde{f}(s) ds$$

est la solution de $-f^{(2)} + \mu f = v$ ($\Leftrightarrow \tau(f) = \tilde{f}$)
satisfaisant $f(\alpha) = 0 = f^+(\alpha)$ et nous avons :

$$f^+(x) = \int_{\alpha}^x (u_1^+(s) u_2(x) - u_1(x) u_2^+(s)) \tilde{f}(s) ds$$

Il est évident que f vérifie toutes les conditions.

QED

Lemme 1

Soit $g \in L^2(I)$ ayant la propriété suivante :

$$\exists \tilde{g} \in L^2(I) \text{ t.q. } \langle T f, g \rangle = \langle f, \tilde{g} \rangle \quad \forall f \in D(T) \text{ à support compact dans } I.$$

Alors $\tilde{g}$ est unique, $g \in D(T^*)$ et $\tilde{g} = T^*g$.

Démonstration (voir la démonstration du théorème 10.11 de Stone (1))

Soient $c \in I$ et u_i définis comme dans la proposition 2. On pose :

$$g_0(x) = \int_c^x (u_1(x) u_2(\lambda) - u_1(\lambda) u_2(x)) \tilde{g}(\lambda) d\lambda$$

Avec la proposition 8 (de l'Annexe 1) il suit que $\tau(g_0) = \tilde{g}$ et $g_0(c) = g_0^+(c) = 0$.

Soient $\tilde{f}$ et f définis comme dans la proposition 2. L'identité de Lagrange donne :

$$\begin{aligned} \langle f, \tilde{g} \rangle &= \int_a^b f^*(\lambda) \tau(g_0)(\lambda) d\lambda = \int_a^b f^*(\lambda) \tilde{g}(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_a^b \tau(f)^*(\lambda) g_0(\lambda) d\lambda + \{f, g_0\}(b) - \{f, g_0\}(a) = \\ &= \int_a^b \tilde{f}^*(\lambda) g_0(\lambda) d\lambda \quad \text{car} \quad f(b) = f^+(b) = f(a) = f^+(a) = 0 \end{aligned}$$

Mais par hypothèse $\langle f, \tilde{g} \rangle = \langle Tf, g \rangle \equiv \langle \tilde{f}, g \rangle$

$$\text{Donc :} \quad \int_I \tilde{f}^*(\lambda) (g(\lambda) - g_0(\lambda)) d\lambda = 0$$

pout tout $\tilde{f}$ vérifiant les conditions de la proposition 2.

On voit alors facilement qu'il existe des constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ uniques (car les u_i sont linéairement indépendantes) t.q. :

$$g(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \int_c^x (u_1(x) u_2(\lambda) - u_1(\lambda) u_2(x)) \tilde{g}(\lambda) d\lambda$$

p.p. dans I . Donc $g \in L^2(I)$ est continue, $\tau(g) = \tilde{g} \in L^2(I)$, donc

$g \in D(T^*)$ et $T^* g = \tilde{g}$

QED

Proposition 3

T est un opérateur symétrique, fermé, à domaine dense. Il est égal à la fermeture de sa restriction T_0 à : $D(T_0) = \{f \in D(T^*) \mid \text{supp } f \text{ est un compact dans } I = (a,b)\}$. De plus T^* est l'adjoint de T .

Démonstration

1) T est symétrique, car $f, g \in D(T) \Rightarrow \langle Tf, g \rangle - \langle f, Tg \rangle = \{f, g\} = 0$

2) D'après le lemme 1, si l'on a $g \in L^2(I)$, telle que $f \mapsto \langle Tf, g \rangle$ est continue sur $D(T_0) \subset L^2(I)$, alors $\exists \tilde{g} \in L^2(I)$ unique, $\tilde{g} = T^*g$, t.q. $\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^*g \rangle \forall f \in D(T_0)$. L'unicité de $\tilde{g}$ montre que $D(T_0)$ (donc $D(T)$) est dense dans $L^2(I)$ et il est clair que nous aurons $(T_0)^* \subset T^*$ (dans cette démonstration nous notons $(A)^*$ l'adjoint d'un opérateur A ; nous désirons montrer que $(T)^* = T^*$). De $T_0 \subset T$ il suit que $(T)^* \subset (T_0)^* \subset T^*$. D'autre part, si $g \in D(T^*)$, alors, $\forall f \in D(T)$: $\langle Tf, g \rangle = \langle T^*f, g \rangle = \langle f, T^*g \rangle + \{f, g\} = \langle f, T^*g \rangle$ donc $g \in D((T)^*)$ et $(T)^*g = T^*g$, c'est-à-dire $T^* \subset (T)^*$. Il suit que $(T)^* = (T_0)^* = T^*$.

3) T est fermé, car son domaine est un sous-espace fermé de $D(T^*)$ muni de la norme graph (c'est l'intersection des noyaux des formes antilinéaires $f \mapsto \{f, g\}$, pour $g \in D(T^*)$, qui sont continues sur $D(T^*)$ muni de la norme graph). Il suit que $T = (T)^{**} = (T_0)^{**} =$ fermeture de T_0 .

QED

Puisque T est un opérateur réel, ses indices de défaut seront égaux : (n, n) . n sera le nombre de solutions (linéairement indépendantes) dans $L^2(I)$ de l'équation $-f^{(2)} + \mu f = zf$, où $z \in \mathbb{C}$ et $\text{Im } z \neq 0$. En particulier: $0 \leq n \leq 2$. La proposition 9 (de l'Annexe 1) implique de plus le résultat essentiel suivant :

Proposition 4 (H. Weyl)

S'il existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que toutes les solutions de l'équation $-f^{(2)} + \mu f = z_0 f$ sont dans $L^2(I)$, T a alors les indices de défaut $(2, 2)$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, toutes les solutions de $-f^{(2)} + \mu f = zf$ sont dans $L^2(I)$.

Démonstration

Dans la proposition 9 (de l'Annexe 1) on prend $\mu_1 = \mu - z_0$ et $\mu_2 = \mu - z$; donc $\mu_1 - \mu_2 = z - z_0$ est une fonction bornée.

QED

Nous dirons que a (resp. b) est une extrémité régulière de $I = (a, b)$ (relativement à τ) si $a > -\infty$ (resp. $b < \infty$) et si μ est une mesure à variation bornée au voisinage de a (resp. b).

Si a est une telle extrémité, alors μ peut se prolonger en une mesure (régulière) sur $[a, b)$. On voit alors facilement que si $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable dans un voisinage de a , toute solution f de $-f^{(2)} + \mu f = g$ est alors telle que les limites suivantes existent $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f^+(x) = f^+(a)$. (En particulier f se prolonge en une fonction continue et dérivable à droite sur $[a, b)$). En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$ toute solution de $-f^{(2)} + (\mu - z) f = 0$ sera de carré intégrable au voisinage de a et pour tout $f \in \mathcal{D}(T^*)$ les limites $f(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ et $f^+(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f^+(x)$ existent (car f est solution de : $\tau(f) = T^*f$ et $T^*f \in L^2(I)$ est intégrable au voisinage de $a > -\infty$). De plus, exactement

comme le fait Stone (1) dans la démonstration du théorème 10.15 (page 471), on peut construire pour tout $\phi \in [0, 2\pi)$ un élément $f_\phi \in D(T^*)$ tel que $f_\phi(a) = \cos \phi$, $f_\phi^+(a) = -\sin \phi$ et $f_\phi(x) = 0$ au voisinage de b . Il en découle d'une part que T ne peut pas avoir les indices de défaut $(0,0)$ (car $f_\phi \in D(T^*)$ et $f_\phi \notin D(T)$, l'expression $\{f_\phi, f_\psi\} = -\{f_\phi, f_\psi\}(a)$ ^{n'étant} pas nulle pour $\phi \neq \psi$; donc T n'est pas auto-adjoint); d'autre part, si T a les indices de défaut $(1,1)$, alors $\forall f$ et $g \in D(T^*) : \{f, g\}(b) = 0$ (voir Stone, dans la démonstration du théorème 10.16, page 474).

Supposons maintenant que a et b soient des extrémités quelconques ($I = (a,b)$) et que $c \in I$ soit quelconque également. D'après la discussion précédente, les indices de défaut de l'opérateur minimal T_c engendré par τ dans $L^2((a,c))$ (resp. $L^2((c,b))$) ne dépendent pas de c et sont égaux au nombre de solutions linéairement indépendantes de l'équation $-f^{(2)} + (\mu - z)f = 0$ ($z \in \mathbb{C}$; $\text{Im } z \neq 0$) qui sont de carré intégrable au voisinage de a (resp. b) (car c sera extrémité régulière de (a,c) et (c,b)). De plus, si on note (n_a, n_a) (resp. (n_b, n_b)) les indices de défaut de T_c , nous avons $n_a = 1$ ou 2 (resp. $n_b = 1$ ou 2).

D'après Weyl nous dirons que a (resp. b) est dans le cas du point limite si $n_a = 1$ (resp. $n_b = 1$), et que a (resp. b) est dans le cas du cercle limite si $n_a = 2$ (resp. $n_b = 2$).

Proposition 5 (H. Weyl)

Les indices de défaut de T sont (n,n) où n est le nombre d'extrémités de I qui sont dans le cas du cercle limite.

Démonstration

1) Il est clair que $n = 2 \iff n_a = 2$ et $n_b = 2$.

2) Si $n_a = 1$ et $n_b = 2$, la solution de $-f^{(2)} + (\mu - z)f = 0$

qui est dans $L^2((a,c))$ est aussi dans $L^2((c,b))$ (car toute solution de l'équation est dans $L^2((c,b))$) donc $n \geq 1$. Mais $n = 2 \Rightarrow n_a = 2$, nous avons donc $n = 1$. On aura le même résultat si $n_a = 2$ et $n_b = 1$. Réciproquement, si $n = 1$, on ne peut pas avoir $n_a = n_b = 2$; supposons $n_a = n_b = 1$. T_c aura alors les indices de défaut (1,1) (dans $L^2((a,c))$ et $L^2((c,b))$) et comme c est extrémité régulière, nous aurons $\{f,g\}(a) = 0$ et $\{f,g\}(b) = 0$ (cf. la discussion précédente) pour tous les $f, g \in D(T_c^*)$, en particulier pour tous les $f, g \in D(T^*)$ (puisque la restriction d'un $f \in D(T^*)$ à (a,c) ou (c,b) est évidemment dans $D(T_c^*)$). Donc $\{f,g\} = 0 \forall f, g \in D(T^*)$, c'est-à-dire $T = T^*$ ce qui est absurde.

3) Si $n_a = n_b = 1$ ou a vu que $n = 0$. Réciproquement, si $n = 0$ il ne reste que la possibilité $n_a = n_b = 1$

QED

Les propositions démontrées jusqu'ici permettent d'étendre aux opérateurs engendrés par τ toute la théorie habituelle des opérateurs différentiels d'ordre 2 (extensions auto-adjointes, représentations intégrales des résolvantes, théorème spectral de Weyl - Stone - Kodaira, etc.) Comme ces résultats ne nous seront pas utiles, nous préférons étudier dans la suite le lien entre les opérateurs T, T^* et les formes sesquilineaires que l'on peut associer aux opérateurs $-\frac{d^2}{dx^2}$ et μ (μ peut être considéré comme un opérateur $\mathcal{D}(I) \rightarrow \mathcal{D}'(I)$).

Nous utiliserons les résultats de T. Kato (1) chapitre VI et, pour simplifier les énoncés, nous nous restreindrons au cas où $I = (0, \infty)$. On définit l'espace de Sobolev :

$\mathcal{H}^1 \equiv \mathcal{H}^{1,2}(I) = \{f \in L^2(I) \mid f \text{ est absolument continue et } f' \in L^2(I)\}$
muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1} = \left(\|f'\|_{L^2(I)}^2 + \|f\|_{L^2(I)}^2 \right)^{1/2}$$

$\mathcal{H}^1$ devient alors un espace de Hilbert. Si l'on note $C_\infty(I)$ l'espace de Banach des fonctions continues, bornées sur I et convergeant vers 0 à l'infini, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$, on démontre alors que $\mathcal{H}^1 \subset C_\infty(I)$ algébriquement et topologiquement; plus précisément :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) < \infty \forall f \in \mathcal{H}^1 : \|f\|_\infty \leq \varepsilon \|f'\|_{L^2(I)} + \delta(\varepsilon) \|f\|_{L^2(I)}$$

(voir Kato (1), IV - 1.2 exemples 1.8 et 1.9; on peut utiliser la méthode de l'exemple 1.6 pour $a = 0$ et $b \rightarrow \infty$. Le fait que $f \in \mathcal{H}^1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ suit du fait que $f' \in L^2(I)$ et $f \in L^2(I) \Rightarrow 2 f'f = (f^2)' \in L^1(I)$, donc que $\lim_{x \rightarrow \infty} f^2(x)$ existe; si cette limite n'était pas 0, on aurait pour un $m > 0$ et $x_0 < \infty : x \geq x_0 \Rightarrow |f^2(x)| \geq m > 0$ c'est-à-dire $\int_{x_0}^{\infty} |f|^2 dx = \infty$, ce qui serait absurde).

Nous allons noter $\mathcal{H}_0^1$ la fermeture de $C_0^\infty((0, \infty))$ dans $\mathcal{H}^1$; il est facile de voir que $f \in \mathcal{H}^1$ implique que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe et que

$$\mathcal{H}_0^1 = \{f \in \mathcal{H}^1 \mid f(0) = 0\}$$

Nous rassemblons dans le lemme suivant quelques propriétés connues de $\mathcal{H}_0^1$:

Lemme 2

Si $f \in \mathcal{H}_0^1$ alors :

$$1) \int_0^\infty \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx \leq 4 \int_0^\infty |f'(x)|^2 dx$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

$$3) \forall x \in I : \frac{|f(x)|^2}{x} \leq 4 \|f'\|_{L^2(I)}^2$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

(Pour 1) voir Kato (1) VI - 4.1 (la relation (4.6)); 2) est une conséquence de 1) : $t \mapsto |f(t)|^2 t^{-1}$ est absolument continue donc si $0 < x < X$, alors

$$(13) \quad \frac{|f(x)|^2}{x} - \frac{|f(x)|^2}{x} = \int_x^x \frac{d}{dt} \frac{|f|^2}{t} dt = - \int_x^x \frac{|f|^2}{t^2} dt + \int_x^x \frac{f' \bar{f} + \bar{f}' f}{t} dt$$

La première intégrale converge pour $x \rightarrow 0$ et la deuxième aussi, car

$$\left| \int_x^x f' \bar{f} t^{-1} dt \right| \leq \left(\int_x^x |f'|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_x^x |f|^2 t^2 dt \right)^{1/2}$$

Il suit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|^2}{x}$ existe; si cette limite n'était pas 0, alors pour $x \rightarrow 0$: $\frac{|f(x)|^2}{x} \geq m > 0$, donc $\int_0^{x_0} \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx \geq \int_0^{x_0} \frac{m}{x} dx =$

$= \infty$, ce qui serait absurde. Pour obtenir 3) on fait $x \rightarrow 0$ dans

13) et ensuite, on pose $X = x$:

$$\begin{aligned} |f(x)|^2 x^{-1} &= - \int_0^x |f|^2 t^{-2} dt + 2 \int_0^x \operatorname{Re}(f' \bar{f}) t^{-1} dt \leq - \int_0^x |f|^2 t^{-2} dt + \\ &+ 2 \int_0^x |f' \bar{f}| t^{-1} dt \leq - \int_0^x |f|^2 t^{-2} dt + 2 \left(\int_0^x |f'|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^x |\bar{f}|^2 t^{-2} dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq 2 \|f'\|_{L^2(I)} \left(\int_0^\infty |f|^2 t^{-2} dt \right)^{1/2} \leq 2 \|f'\|_{L^2(I)} \cdot 2 \|f'\|_{L^2(I)}. \end{aligned}$$

Nous définissons dans $L^2(I)$ la forme sesquilinéaire $\mathcal{T}_0$ par :

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_0) = \mathcal{H}_0^1 \quad \text{et} \quad f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_0) \Rightarrow \mathcal{T}_0(f, g) = \int_0^\infty \bar{f}' g' dx \equiv \langle f', g' \rangle$$

Alors $\mathcal{T}_0$ est fermée, symétrique et définie positive. D'après le théorème VI - 4.2 Kato (1)), l'opérateur auto-adjoint T_0 associé

à $\mathcal{T}_0$ (cf. théorème VI - 2.1 Kato (1)) est l'extension auto-adjointe de l'opérateur minimal associé à l'expression différentielle $\mathcal{T}_0(f) = -f''$ définie par la condition à la limite $f(0) = 0$.
Donc $D(\mathcal{T}_0) = D(\sqrt{\mathcal{T}_0})$ et si $f \in D(\mathcal{T}_0)$, $g \in D(\mathcal{T}_0)$ alors
 $\mathcal{T}_0(f, g) = (\mathcal{T}_0 f, g) = (\sqrt{\mathcal{T}_0} f, \sqrt{\mathcal{T}_0} g)$.

Soit μ une mesure réelle sur I . Remarquons d'abord que l'expression $\int_I |f(s)|^2 \mu(ds)$ n'est pas bien définie comme fonction de la classe d'équivalence $f \in L^2(I)$ si μ n'est pas absolument continue (Lebesgue) (même si f est borélienne, bornée, nulle en dehors d'un compact). Nous sommes obligés de nous restreindre à des classes $f \in L^2(I)$ qui contiennent un élément (qui est donc unique) f continu. Ceci impliquera que les formes $\mathcal{T}_\mu$ ne seront sûrement pas fermées (on ne pourra donc pas admettre des perturbations μ positives quelconques, comme le fait Kato pour le cas $\mu(ds) = V(s) ds$)

On associe à μ la forme $\mathcal{T}_\mu$ définie par :

$$D(\mathcal{T}_\mu) = \left\{ f \in L^2(I) \mid f \text{ est continue et } \int |f(s)|^2 |\mu|(ds) < \infty \right\}$$

$$f, g \in D(\mathcal{T}_\mu) \Rightarrow \mathcal{T}_\mu(f, g) = \int \bar{f}(s) g(s) \mu(ds).$$

Ceci implique que $\mathcal{T}_\mu$ est une forme symétrique, à domaine dense; elle n'est jamais fermée.

Lemme 3

Soit v une mesure réelle sur I t.q.

- 1) $\int_{(0,1)} x |v|(dx) < \infty$
- 2) $\sup_{a \geq 1} \int_{(a, a+1)} |v|(dx) < \infty$

Alors $\mathcal{T}_v$ est $\mathcal{T}_0 - \epsilon$ - bornée, c'est-à-dire $D(\mathcal{T}_v) \supset D(\mathcal{T}_0)$ et :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) < \infty \forall f \in D(T_0) : |T_\nu(f, f)| \leq \varepsilon T_0(f, f) + \delta(\varepsilon) \|f\|_{L^2(I)}^2$$

Démonstration

Nous utilisons la méthode de Kato (1) (page 346). Au chapitre IV - 1.2 Kato montre que $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall f \in D(T_0) \forall x \geq 0$:

$$|f(x)|^2 \leq \varepsilon \int_x^{x+1} |f'(t)|^2 dt + \delta(\varepsilon) \int_x^{x+1} |f(t)|^2 dt$$

($\delta(\varepsilon)$ ne dépend pas de x , mais seulement de la longueur $x+1 - x = 1$ de l'intervalle $[x, x+1]$).

Pour un $X > 0$ fixé et avec le lemme 2 :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(x)|^2 |v|(dx) &= \int_0^{X+0} |f(x)|^2 |v|(dx) + \int_{X+0}^\infty |f(x)|^2 |v|(dx) \leq \\ &\leq \sup_{0 < x \leq X} \frac{|f(x)|^2}{x} \cdot \int_0^{X+0} x |v|(dx) + \int_{X+0}^\infty \int_x^{x+1} (\varepsilon |f'(y)|^2 + \delta |f(y)|^2) dy |v|(dx) \\ &\leq 4 \|f'\|_{L^2(I)}^2 \cdot \int_0^{X+0} x |v|(dx) + \int_{X+0}^\infty \int_x^{x+1} (\varepsilon |f'(y)|^2 + \delta |f(y)|^2) dy \cdot |v|(dx) \end{aligned}$$

Le théorème de Fubini donne pour le deuxième terme la majoration :

$$\sup_{a \gg X} |v|((a, a+1]) (\varepsilon \|f'\|_{L^2(I)}^2 + \delta \|f\|_{L^2(I)}^2)$$

Donc :

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 |v|(dx) \leq \left[4 \int_{(0, X]} x |v|(dx) + \varepsilon \sup_{a \gg X} |v|((a, a+1]) \right] \|f'\|_{L^2(I)}^2 + \delta \sup_{a \gg X} |v|((a, a+1]) \cdot \|f\|_{L^2(I)}^2$$

donc $f \in D(T_\nu)$. De plus $\int_{(0, X]} x |v|(dx) \rightarrow 0$ pour $X \rightarrow +\infty$,
(car $(0, X] \rightarrow \emptyset$) et ε peut être pris aussi petit que l'on veut.

QED

Proposition 6

Soient v une mesure réelle sur $(0, \infty)$ telle que $\int_{(0, \infty)} x |v|(dx) < \infty$ et $\sup_{a \geq 1} |v|((a, a+1)) < \infty$, et $\mathcal{T}_v$ la forme associée à v , elle sera $\mathcal{T}_0 - \varepsilon$ - bornée.

Soient $\ell > -\frac{1}{2}$ et $\mathcal{T}_\ell$ la forme associée à la mesure $\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} dx$; $\mathcal{T}_\ell$ est alors symétrique, $\mathcal{T}_0$ - bornée, la borne relative étant plus petite que 1 si $\ell \in (-\frac{1}{2}, 0)$, et $\mathcal{T}_\ell$ est positive si $\ell \geq 0$. (si $\ell = 0$ alors $\mathcal{T}_\ell = 0$, et ne coïncide donc pas avec $\mathcal{T}_0$). Alors, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_\ell + \mathcal{T}_v$ est une forme symétrique, fermée, bornée inférieurement et $D(\mathcal{T}) = D(\mathcal{T}_0) = \mathcal{X}_0^1$. En particulier, on peut associer à $\mathcal{T}$ un seul opérateur autoadjoint H qui soit borné inférieurement et qui ait la propriété :

$$D(H) \subset D(\mathcal{T}) \text{ et } f \in D(\mathcal{T}), g \in D(H) \Rightarrow \mathcal{T}(f, g) = (f, Hg)$$

De plus $D(H)$ est un coeur pour $\mathcal{T}$, H et $\mathcal{T}$ ont la même borne inférieure et $D(H)$ est caractérisé par :

si $g \in D(\mathcal{T})$ est tel que $\exists \tilde{g} \in L^2(I)$ t.q. pour tout f appartenant à un coeur de $\mathcal{T}$ on ait $\mathcal{T}(f, g) = \langle f, \tilde{g} \rangle$, alors $g \in D(H)$ et $\tilde{g} = Hg$

Démonstration

Le lemme 2 donne $|\mathcal{T}_\ell(f, f)| \leq 4|\ell(\ell+1)| \mathcal{T}_0(f, f)$ (attention : $\mathcal{T}_\ell$ pour $\ell = 0$ et $\mathcal{T}_0$ sont des formes différentes). Si $\ell \in (-\frac{1}{2}, 0)$ alors $|\ell(\ell+1)| < \frac{1}{4}$ et $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $4|\ell(\ell+1)| + \varepsilon < 1$, donc la forme $\mathcal{T}_\ell + \mathcal{T}_v$ sera symétrique. $\mathcal{T}_0$ - bornée avec une borne plus petite que 1; on applique Kato th. VI-1.33. Si $\ell \geq 0$ on forme d'abord $\mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_v$, on applique Kato th. VI-1.33, puis on forme $(\mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_v) + \mathcal{T}_\ell$ et on applique Kato th. VI-1.31 ($\mathcal{T}_\ell$ est positive et on prend sa fermeture comme dans Kato VI-4.1.).

A la forme $\mathcal{T}$ on applique Kato (1) théorème VI-2.1.

QED

Proposition 7

Dans les conditions de la proposition 6, on note μ la mesure $\mu(dx) = \frac{e(e+1)}{x^2} dx + \nu(dx)$ et on note τ l'expression différentielle associée à μ (comme au début de cette annexe). Alors :

$$D(H) = \left\{ f \in L^2(I) \mid f \in \mathcal{H}_0^1 \text{ et } -f^{(2)} + \mu f \text{ est une fonction } \tau(f) \in L^2(I) \right\}$$

et :

$$f \in D(H) \Rightarrow Hf = \tau(f)$$

Démonstration

La démonstration étant similaire à celle du théorème VI-4.2 de Kato (1), nous donnons seulement des indications :

1) Si $g \in L^2(I)$ satisfait les conditions qui définissent $D(H)$ de l'énoncé, alors pour $f \in D(\mathcal{T})$ nous aurons :

$$\mathcal{T}(f, g) = \mathcal{T}_0(f, g) + \mathcal{T}_\mu(f, g) = \int_0^\infty \bar{f}' g' ds + \mathcal{T}_\mu(f, g)$$

Comme $g^{(2)}$ est une mesure et f est absolument continue, on peut intégrer par parties :

$$\int_0^\infty \bar{f}' g' ds = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \infty}} \left(\bar{f}(b) g^+(b) - \bar{f}(a) g^+(a) - \int_a^b \bar{f}(s) g^{(2)}(ds) \right)$$

La dernière intégrale converge absolument pour $a \rightarrow 0$ et $b \rightarrow \infty$ car $\bar{f} g^{(2)} = \bar{f} g \mu - \bar{f} (-g^{(2)} + g\mu)$ et $f, g \in \mathcal{H}_0^1$ donc

$\int_0^\infty |\bar{f} g| |\mu| (ds) < \infty$; de plus $\bar{f} (-g^{(2)} + g\mu) = \bar{f} \tau(g) \in L^1$ (égalité au sens des distributions). Il suit que les $\lim_{b \rightarrow \infty} \bar{f}(b) g^+(b)$

et $\lim_{a \rightarrow 0} \bar{f}(a) g^+(a)$ existent et (voir dans Kato) sont nulles, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(f, g) &= - \int_0^\infty \bar{f}(\lambda) g^{(2)}(\lambda) d\lambda + \mathcal{T}_\mu(f, g) = \\ &= \int_0^\infty \bar{f}(\lambda) (-g^{(2)} + \mu g)(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_0^\infty \bar{f}(\lambda) \cdot \tau(g)(\lambda) \cdot d\lambda = \langle f, \tau(g) \rangle \end{aligned}$$

pour tout $f \in D(\mathcal{T})$. On applique la dernière partie de la proposition 6 pour obtenir $g \in D(H)$ (tel qu'il est défini dans la proposition 6) et $Hg = \tau(g)$

2) Réciproquement, soit g dans le domaine de l'opérateur H associé à $\mathcal{T}$; alors $g \in \mathcal{H}_0^1$. Si on montre que $-g^{(2)} + \mu g$ est une fonction $\tau(g) \in L^2(I)$, le raisonnement tel qu'il a déjà été fait montrera que $Hg = \tau(g)$. Soit $\tilde{g} = Hg$; alors $\forall f \in D(\mathcal{T})$:

$$\mathcal{T}(f, g) = \int_0^\infty (\bar{f}' g' d\lambda + \bar{f} g \mu(d\lambda)) = (f, Hg) = \int_0^\infty \bar{f} \tilde{g} d\lambda$$

donc :

$$\int_0^\infty \bar{f} (\tilde{g} d\lambda - g \mu(d\lambda)) = \int_0^\infty \bar{f}' g' d\lambda$$

Il est clair que $\tilde{g} d\lambda - g \mu(ds)$ est une mesure; soit G une fonction à variation finie qui l'engendre. Alors si $f \in D(\mathcal{T})$ est à support compact dans I ($C_0^\infty(I) \subset D(\mathcal{T})$) :

$$\int_0^\infty \bar{f}' g' d\lambda = \int_0^\infty \bar{f}(\lambda) dG(\lambda) = - \int_0^\infty \bar{f}'(\lambda) G(\lambda) d\lambda$$

ou bien :

$$\int_0^\infty \bar{f}' (g' + G) d\lambda = 0$$

pour toute fonction de ce type. Il s'ensuit facilement qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $g'(s) + G(s) = c$ (p.p.). Donc g' est (presque partout égale à) une fonction à variation

finie et $g^{(2)} = -G^{(1)} = -\tilde{g} ds + g\mu$, ou $-g^{(2)} + g\mu = \tilde{g} ds$,
c'est-à-dire $\tau(g) = \tilde{g} \equiv Hg \in L^2(I)$

QED

Corollaire

L'opérateur H défini dans la proposition 6 est une extension auto-adjointe de l'opérateur minimal T engendré par τ (où μ est défini comme dans la proposition 7).

Démonstration

$$H \subset T^* \quad T = T^{**} \subset H^* = H$$

QED

Par la suite nous supposerons donnés un $\epsilon > -\frac{1}{2}$ et une mesure v réelle sur $(0, \infty)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$1) \quad \int_{(0,1)} x |v|(dx) < \infty$$

2) au voisinage de l'infini v est de la forme

$$v(dx) = v_s(dx) + V_L(x) dx$$

où :

$$I \quad \int_{\infty}^{\infty} |v_s|(dx) < \infty \quad (\text{c'est-à-dire à } v_s \text{ variation bornée au voisinage de l'infini})$$

$$II \quad V_L \in (L^{\infty}(I))_{\epsilon} \quad (\text{c'est-à-dire } V_L \in L^{\infty}(I) \text{ et } \forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) < \infty$$

$$\text{t.q. } \operatorname{ess. sup}_{x \geq N(\epsilon)} |V_L(x)| \leq \epsilon)$$

Les hypothèses de la proposition 6 sont vérifiées, l'opérateur auto-adjoint H donc est bien défini et il a la forme donnée dans la proposition 7; notre but est de montrer que la partie négative

de son spectre est purement discrète. Nous allons suivre la méthode de B. Simon (1) ch. II. 3.

Remarquons d'abord que l'on a :

Proposition 8

Avec les conditions précédentes imposées sur ℓ et v et si τ est l'expression différentielle associée à la mesure

$$\mu(dx) = \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} dx + v(dx)$$

alors ∞ est dans le cas du point limite pour τ

Démonstration

Si $V_L = 0$, en résolvant par approximations successives l'équation ($\lambda > 0$)

$$f(x) = e^{\pm i\sqrt{\lambda} x} + \int_{x+0}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (s-x)}{\sqrt{\lambda}} f(s) \mu(ds)$$

on voit que l'équation $-f^{(2)} + \mu f = \lambda f$ a pour $\lambda > 0$ deux solutions linéairement indépendantes, $f_{\pm\sqrt{\lambda}}$, telles que $\lim_{x \rightarrow \infty} (f_{\pm\sqrt{\lambda}}(x) - e^{\pm i\sqrt{\lambda} x}) = 0$, donc $f_{\pm\sqrt{\lambda}} \notin L^2(1, \infty)$ donc ∞ ne peut pas être dans le cas du cercle limite. (voir la proposition 4). Si $V_L \neq 0$ on applique la proposition 3 (Annexe 1)

QED

Soit $\overset{\circ}{H}$ l'opérateur H dans le cas $v = 0$; $\overset{\circ}{H}$ est donc l'opérateur associé par la proposition 6 à la forme $\mathcal{T}_{\overset{\circ}{H}} = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_e$ et pour $f \in D(\overset{\circ}{H})$ nous avons :

$$(\overset{\circ}{H}f)(x) = -f''(x) + \frac{e(e+1)}{x^2} f(x) \quad (\text{p.p.})$$

$\overset{\circ}{H}$ est alors un opérateur positif, car si $f \in D(\mathcal{T}_{\overset{\circ}{H}}) = \mathcal{H}_0^1$ nous avons : (cf. lemme 2)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\overset{\circ}{H}}(f, f) &= \int_0^\infty |f'(x)|^2 dx + e(e+1) \int_0^\infty \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{4} + e(e+1)\right) \int_0^\infty \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx \geq 0 \quad \text{si } e > -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Il est alors évident que le spectre de $\overset{\circ}{H}$ coïncide avec son spectre continu et avec $[0, \infty)$. On considère le plan complexe coupé sur la ligne $[0, \infty)$ et on choisit une détermination de $z \rightarrow \sqrt{z}$ fixée pour toute la suite. Alors pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ l'opérateur $(\overset{\circ}{H} - z)^{-\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda - z}} dE_\lambda$ (E_λ étant la famille spectrale de $\overset{\circ}{H}$) est bien défini et l'application $\mathbb{C} \setminus [0, \infty) \ni z \mapsto (\overset{\circ}{H} - z)^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(L^2(I))$ est analytique.

On note $\mathcal{H}_0^{1*}$ l'antidual de $\mathcal{H}_0^1$; rappelons que $\mathcal{H}_0^1 = D(\mathcal{T}_0)$ et que si T_0 est l'opérateur associé à $\mathcal{T}_0$, (donc $T_0 = \overset{\circ}{H}$ si $e = 0$) alors $\mathcal{H}_0^1 = D(\sqrt{T_0})$. Pour $f \in D(T_0) \subset \mathcal{H}_0^1$ nous avons (par la suite, l'égalité restera valable pour tout $f \in \mathcal{H}_0^1$) :

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{H}_0^1} &= \left(\|\sqrt{T_0} f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} = \left(\langle f, T_0 f \rangle + \langle f, f \rangle \right)^{1/2} = \\ &= \left(\langle f, (T_0 + 1) f \rangle \right)^{1/2} = \|\sqrt{T_0 + 1} f\|_{L^2(I)} \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_0^{1*}$ peut donc être considéré comme le complété de $L^2(I)$ pour la

norme :

$$\|f\|_{\mathcal{H}_0^{1*}} = \|(\tau_0 + 1)^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^2(I)}$$

(voir B. Simon, loc. cit., pour les détails).

Nous avons aussi $\mathcal{H}_0^1 \subset L^2(I) \subset \mathcal{H}_0^{1*}$, où les inclusions sont algébriques, topologiques, denses et avec décroissance des normes.

Comme $\mathcal{T}_\epsilon$ est $\mathcal{T}_0$ relativement bornée il suit que $\mathcal{T}_H^0$ définit sur $\mathcal{H}_0^1$ la même topologie (utiliser Kato (1) théorème VI - 1.33 si $\epsilon \in (-\frac{1}{2}, 0]$ et théorème VI - 1.31 si $\epsilon > 0$).

En particulier $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$) l'application $(\overset{0}{H} - z)^{-\frac{1}{2}} : L^2(I) \rightarrow \mathcal{H}_0^1$ sera continue et $(\overset{0}{H} - z)^{-\frac{1}{2}} : L^2(I) \subset \mathcal{H}_0^{1*} \rightarrow L^2(I)$ également (par $L^2(I) \subset \mathcal{H}_0^{1*}$ on sous-entend $L^2(I)$ muni de la topologie induite par $\mathcal{H}_0^{1*}$) (Exemple de démonstration : si $f \in L^2(I)$ alors :

$$\begin{aligned} \|(\overset{0}{H} - z)^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^2} &= \|(\overset{0}{H} - z)^{-\frac{1}{2}} (\tau_0 + 1)^{\frac{1}{2}} (\tau_0 + 1)^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^2} \leq \\ &\leq \|(\overset{0}{H} - z)^{-\frac{1}{2}} (\tau_0 + 1)^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \cdot \|(\tau_0 + 1)^{-\frac{1}{2}} f\|_{L^2} = c \|f\|_{\mathcal{H}_0^{1*}} \\ \text{et } c < \infty \text{ car } (\overset{0}{H} - z)^{-\frac{1}{2}} (\tau_0 + 1)^{\frac{1}{2}} &\text{ est l'adjoint de } (\tau_0 + 1)^{\frac{1}{2}} (\overset{0}{H} - z)^{-\frac{1}{2}*} \end{aligned}$$

qui est fermé et défini partout, donc borné). Par continuité (et densité) on peut prolonger $(\overset{0}{H} - z)^{-\frac{1}{2}} : \mathcal{H}_0^{1*} \rightarrow L^2(I)$ comme un opérateur continu.

D'autre part si $g \in \mathcal{H}_0^1$, alors $g v$ est bien défini comme élément de $\mathcal{H}_0^{1*}$ par la formule :

$$f \in \mathcal{H}_0^1 \Rightarrow (g v)(f) = \mathcal{T}_v(f, g)$$

(pour la continuité en f on utilise :

$$|\mathcal{T}_V(f,g)| \leq \sqrt{\mathcal{T}_V(f,f)} \sqrt{\mathcal{T}_V(g,g)} \text{ et le lemme 3)}$$

Donc v induit une application $v : \mathcal{H}_0^1 \rightarrow \mathcal{H}_0^{1*}$ continue (à cause de la *même formule*).

Il suit donc que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ l'application

$$(\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} v (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$$

est bien définie et continue.

Comme dans B. Simon (1) lemmes II. 10 et II. 11 on peut montrer :

Lemme 4

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$ ($\sigma(H)$ = spectre de H) tel que :

$$\| (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} v (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} \|_{\mathcal{L}(L^2)} < 1. \text{ Alors :}$$

$$(H-z)^{-1} = (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} v (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}}$$

Nous aurons encore besoin du lemme suivant :

Lemme 5

1) Si $V_L = 0$ alors $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ l'opérateur :

$$(\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} v (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} : L^2 \rightarrow L^2$$

est Hilbert-Schmidt.

2) Si $V_L \neq 0$ alors l'opérateur précédent est compact.

De plus :

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty} \| (\overset{\circ}{H} - z)^{-\frac{1}{2}} v (\overset{\circ}{H} - z)^{-\frac{1}{2}} \|_{\mathcal{H}(L^2)} = 0$$

Démonstration

On utilise la représentation spectrale de $\overset{\circ}{H}$ (voir S.T. Kuroda (1) pour la méthode que nous utilisons). On sait qu'il existe des solutions $x \mapsto \overset{\circ}{\Psi}(Kx)$ de l'équation $-f'' + e(e+1)x^{-2}f = K^2f$ ($K \geq 0$) telles que :

$$1) \quad \overset{\circ}{\mathcal{F}}f(K) = \int_0^\infty \overset{\circ}{\Psi}(Kx) f(x) dx \text{ existe en moyenne dans } L^2(I), \\ \forall f \in L^2(I)$$

$$2) \quad \overset{\circ}{\mathcal{F}} \text{ est unitaire; } \overset{\circ}{\mathcal{F}}^2 = I \text{ (identité)}$$

$$3) \quad \overset{\circ}{\mathcal{F}} \text{ transforme } H \text{ en opérateur de multiplication par } K^2.$$

Alors $(\overset{\circ}{H} - z)^{-\frac{1}{2}}$ sera l'opérateur de multiplication par $(K^2 - z)^{-\frac{1}{2}}$; $\overset{\circ}{\mathcal{F}}\mathcal{H}_0^1$ sera l'ensemble des f t.q. $\int_0^\infty K^2 |f(K)|^2 dK < \infty$ (car $\overset{\circ}{\mathcal{F}}\mathcal{H}_0^1 = \overset{\circ}{\mathcal{F}}D(\overset{\circ}{VH})$); en particulier, si $f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}\mathcal{H}_0^1$ alors $\int_0^\infty |f(K)| dK < \infty$ (car $\int_1^\infty |f(K)| dK \leq \left(\int_1^\infty K^{-2} dK \right)^{1/2} \cdot \left(\int_1^\infty K^2 |f(K)|^2 dK \right)^{1/2}$).

Supposons d'abord que $V_L = 0$; alors l'intégrale :

$$K_z(\lambda, \mu) = \int_0^\infty \frac{\overset{\circ}{\Psi}(\lambda x) \overset{\circ}{\Psi}(\mu x)}{(x^2 - z)^{1/2} (\mu^2 - z)^{1/2}} v(dx)$$

existe (la fonction $\overset{\circ}{\Psi}$ est bornée et $\overset{\circ}{\Psi}(\lambda x) \sim_{c_\lambda} x^{1+e}$ pour $x \rightarrow 0$; comme $e > -\frac{1}{2}$, l'intégrale converge également à l'origine).

Nous allons montrer que $\overset{\circ}{\mathcal{F}}(\overset{\circ}{H} - z)^{-\frac{1}{2}} v (\overset{\circ}{H} - z)^{-\frac{1}{2}} \overset{\circ}{\mathcal{F}}$ coïncide sur $\overset{\circ}{\mathcal{F}}\mathcal{H}_0'$ avec l'opérateur intégral de noyau K_z . En fait, pour $f, g \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}\mathcal{H}_0'$ nous avons

$$\begin{aligned}
 \langle f, \mathfrak{F} (\mathfrak{H}-z)^{-\frac{1}{2}} v (\mathfrak{H}-z)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{F} g \rangle &= \langle (\mathfrak{H}-z)^{-\frac{1}{2}*} \mathfrak{F} f, v (\mathfrak{H}-z)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{F} g \rangle \\
 &= \int_0^\infty [(\mathfrak{H}-z)^{-\frac{1}{2}*} \mathfrak{F} f]^*(x) [(\mathfrak{H}-z)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{F} g](x) v(dx) = \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\dot{\Psi}(\lambda x)}{\sqrt{\lambda^2 - z}} f^*(\lambda) d\lambda \int_0^\infty \frac{\dot{\Psi}(\mu x)}{\sqrt{\mu^2 - z}} g(\mu) d\mu v(dx)
 \end{aligned}$$

Il suffit encore de montrer que l'on peut changer l'ordre d'intégration, car alors cette expression sera identique à $\langle f, K_z g \rangle$ (après cela, on tient compte du fait que f parcourt un ensemble dense $\mathfrak{F} \mathcal{H}_0^1$); mais on peut appliquer le théorème de Fubini, car toutes les intégrales convergent absolument (on tient compte de ce que $\int_0^\infty |f(\lambda)| d\lambda < \infty$, de ce que $\int_0^\infty |g(\lambda)| d\lambda < \infty$ et du fait que $\dot{\Psi}$ est bornée et s'annule suffisamment vite à l'origine).

Comme $\mathfrak{F} \mathcal{H}_0^1$ est dense dans $L^2(I)$, il suffit de montrer que K_z est un opérateur Hilbert-Schmidt et que sa norme H-S tend vers 0 pour $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$. L'inégalité de Schwartz donne :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \int_0^\infty |K_z(\lambda, \mu)|^2 d\lambda d\mu &\leq \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\mu \left(\int_0^\infty \frac{|\dot{\Psi}(\lambda x)|^2}{|\lambda^2 - z|} |v|(dx) \right) \cdot \left(\int_0^\infty \frac{|\dot{\Psi}(\mu x)|^2}{|\mu^2 - z|} |v|(dx) \right) \\
 &= \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\dot{\Psi}(\lambda x)|^2}{|\lambda^2 - z|} d\lambda \cdot |v|(dx) \right]^2
 \end{aligned}$$

Pour $\operatorname{Re} z < 0$ nous avons :

$$\int_0^\infty \frac{|\dot{\Psi}(\lambda x)|^2}{|\lambda^2 - z|} d\lambda \leq x \int_0^\infty \frac{|\dot{\Psi}(\lambda)|^2}{\lambda^2 + x^2 |\operatorname{Re} z|} d\lambda$$

Comme $|\dot{\Psi}(\lambda)| \leq C_0 \quad \forall \lambda \in I$ le membre de droite est majoré par :

$$C_0^2 x \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2 + x^2 |\operatorname{Re} z|} d\lambda = \frac{C_1}{\sqrt{|\operatorname{Re} z|}} \quad \text{avec } C_1 < \infty \text{ constante}$$

D'autre part :

$$x \int_0^{\infty} \frac{|\dot{\Psi}(\kappa)|^2}{\kappa^2 + x^2 |R_0 z|} d\kappa \leq x \int_0^{\infty} \frac{|\dot{\Psi}(\kappa)|^2}{\kappa^2} d\kappa = c_2 x$$

où $c_2 < \infty$ (car pour $r \rightarrow 0$: $\dot{\Psi}(r) \sim \text{const } r^{1+e}$, donc $\frac{|\dot{\Psi}(r)|^2}{r^2} \sim \text{const } r^{2e}$, et $e > -\frac{1}{2}$ $2e > -1$).

Il suit que :

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{|\dot{\Psi}(\lambda x)|^2}{|\lambda^2 - z|} d\lambda \cdot |v|(dx) \leq \int_{(0,a)} c_2 x |v|(dx) + \int_{[a,\infty)} \frac{c_1}{\sqrt{|R_0 z|}} |v|(dx)$$

Soit $\varepsilon > 0$; comme $\int_{(0,a)} x |v|(dx) \rightarrow 0$ pour $a \rightarrow 0$, on peut choisir a t.q. $\int_{(0,a)} c_2 x |v|(dx) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $N > 0$ t.q. $\int_{[a,\infty)} c_1 |v|(dx) \leq \frac{N\varepsilon}{2}$. Alors $\text{Re } z \leq -N^2 \Rightarrow \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{|\dot{\Psi}(\lambda x)|^2}{|\lambda^2 - z|} \cdot d\lambda |v|(dx) \leq \varepsilon$.

Supposons maintenant que $V_L \neq 0$; une conséquence immédiate des hypothèses est que, $\forall \varepsilon > 0$, on peut écrire

$v(dx) = v_S^\varepsilon(dx) + V_L^\varepsilon(x) dx$ où $\int_0^{\infty} |v_S^\varepsilon| (dx) < \infty$ et $\text{ess. sup}_{x \geq 0} |V_L^\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$. Donc V_L^ε définit un opérateur borné dans $L^2(0, \infty)$ de norme $\leq \varepsilon$, et :

$$(\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} v(\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} = (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} v_S^\varepsilon (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} + (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} V_L^\varepsilon (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}}$$

la norme du dernier terme étant majorée par $\varepsilon \|(\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(L^2)}^2$. Donc le membre de gauche est limité en norme d'opérateurs Hilbert-Schmidt, il est donc compact. Le fait que sa norme converge vers zéro pour $\text{Re } z \rightarrow -\infty$ suit de la décomposition précédente d'une manière évidente.

QED

Proposition 9

Soient $\epsilon > -\frac{1}{2}$ et v une mesure réelle sur $(0, \infty)$ telle que

$$1) \int_{(0,1)} x |v| (dx) < \infty$$

2) au voisinage de l'infini $v(dx) = v_s(dx) + V_L(x) dx$ où
 $|v_s|((x, \infty)) < \infty$ et $V_L \in (L^\infty((x, \infty)))_\epsilon$ (pour x suffisamment grand)
 Alors, l'opérateur H défini dans la proposition 6 est borné
 inférieurement et $\sigma(H) \cap (-\infty, 0)$ est formé de valeurs propres
 (de multiplicité 1) ayant comme seul point d'accumulation possible 0.
 De plus pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ l'opérateur $(\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} v(\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} : L^2 \rightarrow L^2$
 est compact et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ en dehors d'un ensemble discret
 on a :

$$(H-z)^{-1} = (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} v (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} (\overset{0}{H}-z)^{-\frac{1}{2}}$$

Démonstration

Si l'on utilise les lemmes 4 et 5, la démonstration de cette proposition se fait d'une manière standard (voir par exemple B. Simon (1) théorème II. 12 et les remarques qui le suivent). Les valeurs propres ont la multiplicité 1 ce que l'on voit en utilisant le corollaire de la proposition 7 et la proposition 8 (sinon les propositions 5 et 4 impliqueraient un cercle limite à l'infini)

QED

ANNEXE 3

ESTIMATIONS DES INTEGRALES AYANT DES POINTS DE PHASE STATIONNAIRE

Lemme 1

Soient $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tel que :

1) $\phi \in C^1([a, b])$; $\phi'(K) > 0 \forall K \in [a, b]$; et ϕ' est à variation bornée.

2) f est à variation bornée et $f(a) = f(b) = 0$.

On pose :

$$m_{\phi'} = \inf_{a \leq K \leq b} \phi'(K) > 0 \quad ; \quad M_f = \sup_{a \leq K \leq b} |f(K)|$$

Alors :

$$\left| \int_a^b e^{\pm i\phi(K)} f(K) dK \right| \leq \frac{1}{m_{\phi'}} \left[\int_a^b |df(K)| + M_f \cdot \frac{1}{m_{\phi'}} \int_a^b |d\phi'(K)| \right]$$

Cas particulier : si de plus $\phi \in C^2([a, b])$ et $M_{\phi''} = \sup_{a \leq K \leq b} |\phi''(K)|$ (K)

alors : $\left| \int_a^b e^{\pm i\phi(K)} f(K) dK \right| \leq \frac{1}{m_{\phi'}} \left[\int_a^b |df(K)| + M_f \cdot (b-a) \cdot \frac{M_{\phi''}}{m_{\phi'}} \right]$

Démonstration

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{\pm i\phi(K)} f(K) dK &= \frac{f(b)}{\pm i\phi'(b)} e^{\pm i\phi(b)} - \frac{f(a)}{\pm i\phi'(a)} e^{\pm i\phi(a)} - \int_a^b e^{\pm i\phi(K)} d\left(\frac{f(K)}{\pm i\phi'(K)}\right) \\ &= \pm i \int_a^b e^{\pm i\phi(K)} \left(\frac{1}{\phi'(K)} df(K) - \frac{f(K)}{\phi'(K)^2} d\phi'(K) \right) \end{aligned}$$

QED

Par la suite, nous allons chercher une estimation de ce type pour le cas où $\phi'(c) = 0$ pour un $c \in (a, b)$ (en fait, la démonstration montre aussi ce qui se passe si $c = a$ ou $c = b$; mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat). Dans la démonstration du lemme 2, nous suivrons la méthode habituelle de la phase stationnaire (voir par exemple V.P. Maslov (1) ch VI. paragraphe 2 lemmes 6.9 et 6.10 ou bien Dieudonné (2) ch IV. paragraphe 4.)

Lemme 2

Soient $-\infty < a < c < b < +\infty$, $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

1) $\phi \in C^4([a, b])$; $\phi'(c) = 0$ et $\phi'(K) \neq 0$ si $K \neq c$; et $\phi''(c) > 0$.

2) $f \in C^2([a, b])$ et $\text{supp } f \subset (a, b)$

Pour un $\varepsilon > 0$ tel que $c - \varepsilon \leq K \leq c + \varepsilon \Rightarrow \phi''(K) > 0$ on définit :

$$w_{\varepsilon, \phi'} = \inf_{\substack{a \leq K \leq c-\varepsilon \\ c+\varepsilon \leq K \leq b}} |\phi'(K)| \quad ; \quad w_{\varepsilon, \phi''} = \inf_{c-\varepsilon \leq K \leq c+\varepsilon} \phi''(K)$$

Pour toute fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ on pose $M_g = \sup_{a \leq K \leq b} |g(K)|$

Alors :

$$\left| \int_a^b e^{\pm i\phi(K)} f(K) dK - \sqrt{\frac{2\pi}{\phi''(c)}} f(c) e^{\pm i(\phi(c) + \frac{\pi}{4})} \right| \leq \frac{\alpha_1}{w_{\varepsilon, \phi'}} + \frac{\alpha_2}{w_{\varepsilon, \phi''}^2}$$

où :

$$\alpha_1 = (b-a) M_{f'} + (b-a) M_f \frac{M_{\phi''}}{w_{\varepsilon, \phi'}}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & \frac{(b-a) |f(c)|}{\varepsilon^3} \cdot \frac{M_{\phi'} + 4(b-a)^{-1}}{w_{\varepsilon, \phi''}} + 26\varepsilon M_{f''} \left[\frac{M_{\phi''}}{w_{\varepsilon, \phi''}} \right]^4 + 26\varepsilon |f(c)| \left[\frac{M_{\phi''} M_{\phi'''} }{(w_{\varepsilon, \phi''})^2} \right]^2 \\ & + 26\varepsilon |f(c)| \left[\frac{M_{\phi''}}{w_{\varepsilon, \phi''}} \right]^3 \frac{M_{\phi^{(4)}}}{w_{\varepsilon, \phi''}} + 26\varepsilon M_{f'} \left[\frac{M_{\phi''}}{w_{\varepsilon, \phi''}} \right]^3 \cdot \frac{M_{\phi''}}{w_{\varepsilon, \phi''}} \end{aligned}$$

Démonstration

a) Comme $\phi'(K) > 0$ sur $(c, b]$ et $\phi'(K) < 0$ sur $[a, c)$, ϕ sera strictement croissante sur $(c, b]$ et strictement décroissante sur $[a, c)$ (c'est-à-dire c'est un minimum absolu de ϕ sur $[a, b]$). Nous pouvons donc introduire la fonction $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$x(K) = \begin{cases} c - \sqrt{\phi(K) - \phi(c)} & \text{si } K \in [a, c] \\ c + \sqrt{\phi(K) - \phi(c)} & \text{si } K \in [c, b] \end{cases}$$

Il suit que $x : [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$, avec $\tilde{a} = x(a) = c - \sqrt{\phi(a) - \phi(c)}$ et $\tilde{b} = x(b) = c + \sqrt{\phi(b) - \phi(c)}$, est un homéomorphisme strictement croissant tel que $x(c) \equiv \tilde{c} = c$ et :

$$(x(K) - c)^2 = \phi(K) - \phi(c) \quad \forall K \in [a, b]$$

Il est clair que x est de classe C^4 sur $[a, c) \cup (c, b]$; on peut montrer que $x \in C^3([a, b])$ (le fait que $\phi'(c) = 0$ est essentiel ici); le calcul étant assez long, nous montrerons seulement que x''' est bornée au voisinage de c .

b) Si $K \neq c$, nous avons :

$$x(K) = c + \eta_1(K-c) \cdot \sqrt{\phi(K) - \phi(c)}$$

$$x'(K) = \frac{1}{2} \frac{\eta_1(K-c) \cdot \phi'(K)}{\sqrt{\phi(K) - \phi(c)}} \equiv \frac{1}{2} \frac{|\phi'(K)|}{\sqrt{\phi(K) - \phi(c)}}$$

La formule de Taylor donne

$$\phi(K) = \phi(c) + \left[\frac{\phi''(c)}{2} + \theta_2(K) \right] (K-c)^2$$

$$\phi'(K) = [\phi''(c) + \eta_1(K)] (K-c)$$

avec :

$$\theta_2(\kappa) = \left[\frac{\phi'''(c)}{6} + \theta_3(\kappa) \right] (\kappa - c)$$

$$\eta_1(\kappa) = \left[\frac{\phi'''(c)}{2} + \eta_2(\kappa) \right] (\kappa - c)$$

et $\lim_{\kappa \rightarrow c} \theta_3(\kappa) = \lim_{\kappa \rightarrow c} \eta_2(\kappa) = 0$ (le seul fait que nous ayons supposé est $\phi \in C^3([a, b])$).

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{x(\kappa) - x(c)}{\kappa - c} &= \eta_1(\kappa - c) \frac{\sqrt{\phi(\kappa) - \phi(c)}}{\kappa - c} = \frac{\sqrt{\phi(\kappa) - \phi(c)}}{|\kappa - c|} = \\ &= \left[\frac{\phi''(c)}{2} + \theta_2(\kappa) \right]^{1/2} \longrightarrow \sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}} \quad \text{si } \kappa \rightarrow c. \end{aligned}$$

x est donc dérivable en c et $x'(c) = \sqrt{\frac{\phi''(c)}{2}}$.

De plus x' est continue en c , comme on le voit en introduisant les formules de Taylor dans $x'(\kappa)$ et en faisant tendre κ vers c .
Donc, $x \in C^1([a, b])$

c) Nous allons utiliser le théorème de la moyenne pour des fonctions réelles $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: si $g \in C^n([a, b])$ et $K \in [a, b]$ alors $\exists \xi$ compris entre c et K tel que :

$$g(\kappa) - g(c) - g'(c)(\kappa - c) - \dots - g^{(n-1)}(c) \frac{(\kappa - c)^{n-1}}{(n-1)!} = g^{(n)}(\xi) \frac{(\kappa - c)^n}{n!}$$

En particulier :

$$\frac{1}{n!} \inf |g^{(n)}(\xi)| \leq \frac{|g(\kappa) - g(c) - \dots - g^{(n-1)}(c) \frac{(\kappa - c)^{n-1}}{(n-1)!}|}{|\kappa - c|^n} \leq \frac{1}{n!} \sup |g^{(n)}(\xi)|$$

on prend le inf et le sup sur les ξ compris entre K et c .

Si g est une fonction complexe, seule la deuxième inégalité est vraie.

d) Nous cherchons une estimation pour x'' au voisinage de c .

$$x''(\kappa) = \frac{1}{4} \frac{2 \phi''(\kappa)(\phi(\kappa) - \phi(c)) - \phi'(\kappa)^2}{(\phi(\kappa) - \phi(c))^{3/2}} \quad (\kappa \neq c)$$

(comme cela a été fait plus haut, on peut voir que $x''(c) = \frac{\phi'''(c)}{3\sqrt{2}\phi''(c)}$ existe et $x \in C^2([a, b])$; mais nous n'avons pas besoin de cela.)
Le théorème de la moyenne implique :

$$\phi(\kappa) - \phi(c) = |\phi(\kappa) - \phi(c) - \phi'(c)(\kappa - c)| \geq \frac{1}{2} \inf |\phi''(\xi)| \cdot |\kappa - c|^2$$

(dans cette démonstration et par la suite le sup et le inf sont pris sur les point compris entre c et K). Donc :

$$|x''(\kappa)| \leq \frac{1}{\sqrt{2} \left[\inf |\phi''(\xi)| \right]^{3/2}} \cdot \frac{|2 \phi''(\kappa)(\phi(\kappa) - \phi(c)) - \phi'(\kappa)^2|}{|\kappa - c|^3}$$

Et :

$$\begin{aligned} \left| \frac{2 \phi''(\kappa)(\phi(\kappa) - \phi(c)) - \phi'(\kappa)^2}{(\kappa - c)^3} \right| &= \left| 2 \phi''(\kappa) \frac{\phi(\kappa) - \phi(c) - \frac{\phi''(c)}{2}(\kappa - c)^2}{(\kappa - c)^3} + \frac{\phi''(\kappa) - \phi''(c)}{\kappa - c} \phi''(c) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\phi'(\kappa) - \phi''(c)(\kappa - c)}{(\kappa - c)^2} \cdot \frac{\phi'(\kappa) + \phi''(c)(\kappa - c)}{\kappa - c} \right| \leq 2 \sup |\phi''(\xi)| \cdot \frac{1}{6} \sup |\phi'''(\xi)| + \sup |\phi'''(\xi)| \cdot \sup |\phi''(\xi)| \\ &\quad + \frac{1}{2} \sup |\phi'''(\xi)| \cdot 2 \sup |\phi''(\xi)| \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$|x''(\kappa)| \leq \frac{7}{3\sqrt{2}} \frac{\sup |\phi'''(\xi)| \cdot \sup |\phi''(\xi)|}{\left(\inf |\phi''(\xi)| \right)^{3/2}}$$

e) Nous cherchons une estimation pour x''' au voisinage de c .

Pour $K \neq c$:

$$x'''(K) = \frac{2\phi''(K-c)}{4} \frac{2\phi'''(K)(\phi(K)-\phi(c))^2 - 3\phi''(K)\phi'(K)(\phi(K)-\phi(c)) + \frac{3}{2}\phi'(K)^3}{(\phi(K)-\phi(c))^{5/2}}$$

Comme on l'a vu plus haut :

$$|x'''(K)| \leq \frac{\sqrt{2}}{(\inf |\phi''(\xi)|)^{5/2}} \frac{|2\phi'''(K)(\phi(K)-\phi(c))^2 - 3\phi''(K)\phi'(K)(\phi(K)-\phi(c)) + \frac{3}{2}\phi'(K)^3|}{|K-c|^5}$$

Nous devons estimer le dernier facteur; les calculs sont assez longs et nous ne donnerons pas tous les détails. On peut écrire ce facteur de la manière suivante

$$2\phi'''(K) \cdot \frac{\phi(K)-\phi(c) - \frac{\phi''(c)}{2}(K-c)^2}{(K-c)^3} \cdot \frac{\phi(K)-\phi(c) + \frac{\phi''(c)}{2}(K-c)^2}{(K-c)^2} +$$

$$+ \frac{1}{2(K-c)} \left[\phi'''(K)\phi''(c)^2 - 3\frac{\phi'(K)}{K-c} \frac{2\phi''(K)(\phi(K)-\phi(c)) - \phi'(K)^2}{(K-c)^3} \right]$$

On majore le premier terme à l'aide du théorème de la moyenne.

Le deuxième s'écrit comme :

$$\frac{1}{2(K-c)} \left[\phi'''(K)\phi''(c)^2 - 3\phi''(c) \frac{2\phi''(K)(\phi(K)-\phi(c)) - \phi'(K)^2}{(K-c)^3} \right] +$$

(14)

$$+ \frac{3}{2(K-c)} \left(\phi''(c) - \frac{\phi'(K)}{K-c} \right) \cdot \frac{2\phi''(K)(\phi(K)-\phi(c)) - \phi'(K)^2}{(K-c)^3}$$

En tenant compte de la majoration obtenue dans le point (d), on peut utiliser le théorème de la moyenne pour le deuxième terme de (14). On ne continue qu'avec le premier terme et on le décompose d'une manière similaire (on voit ici la nécessité du fait que $\phi \in C^4([a, b])$; en fait il suffirait que ϕ'' soit Hölder - continue d'un indice $\theta > 0$, car une divergence $(\kappa - c)^{-(1-\theta)}$ ne compte pas pour les intégrales). Le résultat est :

$$|x'''(\kappa)| \leq \frac{\frac{71 \cdot \sqrt{2}}{24} (\sup |\phi'''(\xi)|)^2 \sup |\phi''(\xi)| + \frac{15 \cdot \sqrt{2}}{8} \sup |\phi^{(4)}(\xi)| (\sup |\phi''(\xi)|)^2}{(\inf |\phi''(\xi)|)^{5/2}}$$

f) Soit $K = K(x)$ l'inverse de x . Donc $K : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ est un homéomorphisme croissant de classe C^3 , $K(\tilde{c}) = K(c) = c$ et :

$$K'(x) = 2 \frac{x - c}{\phi'(K(x))} \quad \text{pour } x \neq c$$

$$K'(c) = \sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}}$$

Nous aurons également besoin de $K''(c)$. Nous avons :

$$\frac{K'(x) - K'(c)}{x - c} = \frac{2}{\phi'(K(x))} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\phi''(c)} (x - c)}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{K'(x) - K'(c)}{x - c} &= \lim_{\kappa \rightarrow c} \frac{K'(x(\kappa)) - K'(c)}{x(\kappa) - x(c)} = \lim_{\kappa \rightarrow c} \left[\frac{2}{\phi'(K(x(\kappa)))} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\phi''(c)} (\phi(\kappa) - \phi(c))} \right] = \lim_{\kappa \rightarrow c} \frac{2}{\phi''(c) (\kappa - c)} \left[\frac{1}{1 + \eta(\kappa)} - \frac{1}{(1 + \theta(\kappa))^{1/2}} \right] \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule de Taylor et où η et θ sont respectivement $\phi''(c)^{-1} \eta_1$ et $2 \phi''(c)^{-1} \theta_2$.

Avec la formule:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \dots$$

valable pour $|x| < 1$ et la forme de η_1 et θ_2 donnée au point (b), on obtient

$$\kappa''(c) = -\frac{2}{3} \frac{\phi'''(c)}{(\phi''(c))^2}$$

g) Considérons d'abord l'intégrale :

$$J_+ = \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} f(\kappa) d\kappa$$

On note $c' = c + \varepsilon$ et on choisit $e : [c, b] \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ telle que $e(\kappa) = 1$ sur $[c, c']$ et $e(\kappa) = 0$ sur $[b', b]$, pour $\underbrace{b'}_{< c'} < b$. Alors (nous suivons la démonstration de Maslov pour cette décomposition) :

$$J_+ = \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} f(c) e(\kappa) d\kappa + \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} (f(\kappa) - f(c)) e(\kappa) d\kappa + \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} f(\kappa) (1 - e(\kappa)) d\kappa$$

En tenant compte de ce que

$$\int_c^\infty e^{\pm i(x-c)^2} dx = \int_0^\infty e^{\pm i x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pm i \frac{\pi}{4}}$$

(intégrale impropre) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} f(c) e(\kappa) d\kappa &= e^{\pm i \phi(c)} f(c) \int_c^b e^{\pm i(x-c)^2} e(\kappa(x)) \kappa'(x) dx = \\ &= e^{\pm i \phi(c)} f(c) \int_c^\infty e^{\pm i(x-c)^2} e(\kappa(x)) \kappa'(x) dx = e^{\pm i \phi(c)} f(c) \int_c^\infty e^{\pm i(x-c)^2} \kappa'(c) dx + \\ &+ e^{\pm i \phi(c)} f(c) \int_c^\infty e^{\pm i(x-c)^2} (e(\kappa(x)) \kappa'(x) - \kappa'(c)) dx = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2\phi''(c)}} f(c) e^{\pm i(\phi(c) + \frac{\pi}{4})} + f(c) e^{\pm i\phi(c)} \int_c^{\infty} e^{\pm i(x-c)^2} (e(\kappa(x)) \kappa'(x) - \kappa'(c)) dx$$

En intégrant par parties le dernier terme :

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{\pi}{2\phi''(c)}} f(c) e^{\pm i(\phi(c) + \frac{\pi}{4})} - \lim_{x \rightarrow c} \frac{e(\kappa(x)) \kappa'(x) - \kappa'(c)}{\pm i 2(x-c)} e^{\pm i(x-c)^2} f(c) e^{\pm i\phi(c)} \\ &- f(c) e^{\pm i\phi(c)} \int_c^{\infty} e^{\pm i(x-c)^2} \frac{d}{dx} \frac{e(\kappa(x)) \kappa'(x) - \kappa'(c)}{\pm 2i(x-c)} dx = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2\phi''(c)}} f(c) e^{\pm i(\phi(c) + \frac{\pi}{4})} \pm \frac{i}{2} \kappa''(c) f(c) e^{\pm i\phi(c)} \pm \\ &\pm \frac{i}{2} f(c) e^{\pm i\phi(c)} \int_c^{\infty} e^{\pm i(x-c)^2} \frac{d}{dx} \frac{e(\kappa(x)) \kappa'(x) - \kappa'(c)}{x-c} \cdot dx = \end{aligned}$$

(la dernière intégrale existe évidemment au sens impropre pour $x \rightarrow c$; le fait que K soit de classe C^2 implique qu'elle converge absolument; nous allons en donner plus tard une estimation exacte).

On écrit la dernière intégrale comme la somme $\int_c^{\tilde{b}} + \int_{\tilde{b}}^{\infty}$; dans la première intégrale on revient à l'ancienne variable K et dans la deuxième on utilise le fait que $e(K(x)) = 0$ si $x \geq \tilde{b}$, pour obtenir :

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{\pi}{2\phi''(c)}} f(c) e^{\pm i(\phi(c) + \frac{\pi}{4})} \pm \frac{i}{2} \kappa''(c) f(c) e^{\pm i\phi(c)} \pm \\ &\pm \frac{i}{2} f(c) e^{\pm i\phi(c)} \int_c^{\tilde{b}} e^{\pm i(\phi(\kappa) - \phi(c))} \frac{d}{d\kappa} \frac{e(\kappa) \kappa'(\kappa) - \kappa'(c)}{\sqrt{\phi(\kappa) - \phi(c)}} d\kappa \pm \\ &\pm \frac{i}{2} f(c) e^{\pm i\phi(c)} \int_{\tilde{b}}^{\infty} e^{\pm i(x-c)^2} \frac{dx}{(x-c)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2\phi''(c)}} f(c) e^{\pm i(\phi(c) + \frac{\pi}{4})} \mp \frac{i}{3} \frac{\phi'''(c)}{(\phi''(c))^2} f(c) e^{\pm i\phi(c)} \pm \\ &\pm i f(c) \int_c^{\tilde{b}} e^{\pm i\phi(\kappa)} \frac{d}{d\kappa} \left[\frac{e(\kappa)}{\phi'(\kappa)} - \frac{1}{\sqrt{2\phi''(c)(\phi(\kappa) - \phi(c))}} \right] \cdot d\kappa \pm \\ &\pm i \frac{f(c) e^{\pm i\phi(c)}}{\sqrt{8\phi''(c)}} \int_{\phi(\tilde{b}) - \phi(c)}^{\infty} \frac{e^{\pm it}}{t^{3/2}} dt \end{aligned}$$

Considérons maintenant le deuxième terme de J_+ ; une intégration par parties donne (le fait que l'intégrale obtenue converge en $K = c$ sera également une conséquence des estimations que nous ferons plus tard; pour le moment on peut la considérer comme impropre) :

$$\begin{aligned} \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} (f(\kappa) - f(c)) e(\kappa) d\kappa &= - \lim_{\kappa \rightarrow c} \frac{f(\kappa) - f(c)}{\pm i \phi'(\kappa)} e(\kappa) e^{\pm i \phi(\kappa)} - \\ &- \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} \frac{d}{d\kappa} \left[\frac{f(\kappa) - f(c)}{\pm i \phi'(\kappa)} e(\kappa) \right] d\kappa = \pm i \frac{f'(c)}{\phi''(c)} e^{\pm i \phi(c)} \pm \\ &\pm i \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} \frac{d}{d\kappa} \frac{e(\kappa) (f(\kappa) - f(c))}{\phi'(\kappa)} d\kappa \end{aligned}$$

Si on insère ces expressions dans J_+ on obtient :

$$\begin{aligned} J_+ &= \sqrt{\frac{\pi}{2 \phi''(c)}} f(c) e^{\pm i(\phi(c) + \frac{\pi}{4})} \mp \frac{i}{3} \frac{\phi'''(c)}{(\phi''(c))^2} f(c) e^{\pm i \phi(c)} \pm i \frac{f'(c)}{\phi''(c)} e^{\pm i \phi(c)} \pm \\ &\pm i \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} \frac{d}{d\kappa} \left[\frac{e(\kappa) f(c)}{\phi'(\kappa)} - \frac{f(c)}{\sqrt{2 \phi''(c) (\phi(\kappa) - \phi(c))}} \right] d\kappa \pm \\ &\pm i \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} \frac{d}{d\kappa} \left[\frac{e(\kappa) f(\kappa)}{\phi'(\kappa)} - \frac{e(\kappa) f(c)}{\phi'(\kappa)} \right] d\kappa \pm \\ &\pm i \frac{f(c) e^{\pm i \phi(c)}}{\sqrt{8 \phi''(c)}} \int_{\phi(b) - \phi(c)}^{\infty} \frac{e^{\pm i t}}{t^{3/2}} dt + \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} f(\kappa) (1 - e(\kappa)) d\kappa = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2 \phi''(c)}} f(c) e^{\pm i(\phi(c) + \frac{\pi}{4})} \pm \frac{i}{\phi''(c)} e^{\pm i \phi(c)} \left[f'(c) - \frac{1}{3} f(c) \frac{\phi'''(c)}{\phi''(c)} \right] \pm \\ &\pm i \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} \frac{d}{d\kappa} \left[\frac{e(\kappa) f(\kappa)}{\phi'(\kappa)} - \frac{f(c)}{\sqrt{2 \phi''(c) (\phi(\kappa) - \phi(c))}} \right] d\kappa \pm \\ &\pm i \frac{f(c) e^{\pm i \phi(c)}}{\sqrt{8 \phi''(c)}} \int_{\phi(b) - \phi(c)}^{\infty} \frac{e^{\pm i t}}{t^{3/2}} dt \pm i \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} \frac{d}{d\kappa} \frac{f(\kappa) - f(c) e(\kappa)}{\phi'(\kappa)} d\kappa \end{aligned}$$

(nous avons intégré par parties le dernier terme et tenu compte du fait que $f(K) (1-e(K)) = 0$ au voisinage de c (à cause de e) et au voisinage de b (à cause de f)).

On remarque que les termes qui contiennent e se compensent et donc:

$$\begin{aligned} \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} f(\kappa) d\kappa &= \sqrt{\frac{\pi}{2 \phi''(c)}} f(c) e^{\pm i(\phi(c) + \frac{\pi}{4})} \pm \frac{i}{\phi''(c)} e^{\pm i \phi(c)} \left[f'(c) - f(c) \frac{\phi'''(c)}{3 \phi''(c)} \right] \\ &\pm i \int_c^b e^{\pm i \phi(\kappa)} \frac{d}{d\kappa} \left[\frac{f(\kappa)}{\phi'(\kappa)} - \frac{f(c)}{\sqrt{2 \phi''(c) (\phi(\kappa) - \phi(c))}} \right] d\kappa \\ &\pm i \frac{f(c) e^{\pm i \phi(c)}}{\sqrt{8 \phi''(c)}} \int_{\phi(b) - \phi(c)}^{\infty} \frac{e^{\pm i t}}{t^{3/2}} dt \end{aligned}$$

h) On peut calculer l'intégrale sur (a, c) en faisant plus haut le changement de variables $t \rightarrow -t$ (donc (a, c) est remplacé par $(-c, -a)$). On obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^c e^{\pm i \phi(\kappa)} f(\kappa) d\kappa &= \sqrt{\frac{\pi}{2 \phi''(c)}} f(c) e^{\pm i(\phi(c) + \frac{\pi}{4})} \mp \frac{i}{\phi''(c)} e^{\pm i \phi(c)} \left[f'(c) - f(c) \frac{\phi'''(c)}{3 \phi''(c)} \right] \\ &\pm i \int_a^c e^{\pm i \phi(\kappa)} \frac{d}{d\kappa} \left[\frac{f(\kappa)}{\phi'(\kappa)} + \frac{f(c)}{\sqrt{2 \phi''(c) (\phi(\kappa) - \phi(c))}} \right] d\kappa \\ &\pm i \frac{f(c) e^{\pm i \phi(c)}}{\sqrt{8 \phi''(c)}} \int_{\phi(a) - \phi(c)}^{\infty} \frac{e^{\pm i t}}{t^{3/2}} dt \end{aligned}$$

Remarquons que si l'on intègre par parties les derniers termes de ces expressions :

$$\begin{aligned} \pm i \int_{\phi(b) - \phi(c)}^{\infty} \frac{e^{\pm i t}}{t^{3/2}} dt &= \int_{\phi(b) - \phi(c)}^{\infty} t^{-3/2} d e^{\pm i t} = \\ &= - \frac{e^{\pm i (\phi(b) - \phi(c))}}{(\phi(b) - \phi(c))^{3/2}} + \frac{3}{2} \int_{\phi(b) - \phi(c)}^{\infty} \frac{e^{\pm i t}}{t^{3/2}} dt \end{aligned}$$

i) Il suit que :

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{\pm i \phi(\kappa)} f(\kappa) d\kappa &= \sqrt{\frac{2\pi}{\phi''(c)}} f(c) e^{\pm i(\phi(c) + \frac{\pi}{4})} \pm \\ &\pm i \int_a^b e^{\pm i \phi(\kappa)} \frac{d}{d\kappa} \left[\frac{f(\kappa)}{\phi'(\kappa)} - \frac{f(c) \operatorname{sgn}(\kappa-c)}{\sqrt{2\phi''(c)(\phi(\kappa)-\phi(c))}} \right] d\kappa \\ &- \frac{f(c)}{\sqrt{8\phi''(c)}} \left[\frac{e^{\pm i \phi(b)}}{(\phi(b)-\phi(c))^{3/2}} + \frac{e^{\pm i \phi(a)}}{(\phi(a)-\phi(c))^{3/2}} \right] \\ &+ \frac{3f(c) e^{\pm i \phi(c)}}{2\sqrt{8\phi''(c)}} \left[\int_{\phi(a)-\phi(c)}^{\infty} + \int_{\phi(b)-\phi(c)}^{\infty} \right] \frac{e^{\pm i t}}{t^{5/2}} dt \end{aligned}$$

Nous allons estimer le deuxième, troisième et quatrième terme de cette formule, qui seront notés respectivement J_2 , J_3 , J_4 .

Estimation de J_2

$$\begin{aligned} \frac{f(\kappa)}{\phi'(\kappa)} - \frac{f(c) \operatorname{sgn}(\kappa-c)}{\sqrt{2\phi''(c)(\phi(\kappa)-\phi(c))}} &= \frac{f(\kappa)}{\phi'(\kappa)} - \frac{f(c)}{\sqrt{2\phi''(c)}} \frac{2x'(\kappa)}{\phi'(\kappa)} = \\ &= \frac{1}{x'(c)} \frac{f(\kappa)x'(c) - f(c)x'(\kappa)}{\phi'(\kappa)} \end{aligned}$$

On note $g = f \cdot x'(c) - f(c) \cdot x'$. Alors $g \in C^2([a, b])$ et nous allons d'abord majorer l'expression $\left(\frac{g}{\phi}\right)'$ au voisinage de c (remarquons que $g(c) = 0$). Nous avons :

$$\frac{1}{x'(c)} \left| \frac{g'(\kappa)\phi'(\kappa) - g(\kappa)\phi''(\kappa)}{\phi'(\kappa)^2} \right| \leq \frac{1}{x'(c) (\inf |\phi''(\xi)|)^2} \frac{|g'(\kappa)\phi'(\kappa) - g(\kappa)\phi''(\kappa)|}{(\kappa-c)^2}$$

(tous les inf et sup sont pris sur les points compris entre c et K).

Et :

$$\begin{aligned} \frac{g'(\kappa) \phi'(\kappa) - g(\kappa) \phi''(\kappa)}{(\kappa - c)^2} &= \frac{g'(\kappa) - g'(c)}{\kappa - c} \cdot \frac{\phi'(\kappa)}{\kappa - c} + g'(c) \frac{\phi''(c) - \phi''(\kappa)}{\kappa - c} + \\ &+ g'(c) \frac{\phi'(\kappa) - \phi'(c)}{(\kappa - c)^2} - \frac{g(\kappa) - g(c)}{(\kappa - c)^2} \phi''(\kappa) \end{aligned}$$

Expression que l'on peut majorer à l'aide du théorème de la moyenne. Il suit alors que :

$$\left| \frac{d}{d\kappa} \left[\frac{f(\kappa)}{\phi'(\kappa)} - \frac{f(c) \wedge g(\kappa - c)}{\sqrt{2\phi''(c)(\phi(\kappa) - \phi(c))}} \right] \right| \leq \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sup |g''(\xi)| + \sup |\phi''(\xi)| + \sup |g'(\xi)| + \sup |\phi''(\xi)|}{(\inf |\phi''(\xi)|)^{5/2}}$$

D'autre part :

$$g' = f' \cdot x'(c) - f(c) \cdot x'' \quad ; \quad g'' = f'' \cdot x'(c) - f(c) \cdot x'''$$

On utilise les majorations obtenues dans ce qui précède pour x'' et x''' afin de voir que si $K \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ l'expression précédente est majorée par

$$\frac{1}{2\varepsilon} \left(\alpha_2 - \frac{(b-a)|f(c)|}{\varepsilon^3} \frac{M_{\phi'} + 4(b-a)^{-1}}{M_{\varepsilon, \phi''}} \right) \frac{1}{M_{\varepsilon, \phi''}}$$

(cf. l'énoncé). Alors :

$$\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \left| \frac{d}{d\kappa} \left[\frac{f(\kappa)}{\phi'(\kappa)} - \frac{f(c) \wedge g(\kappa - c)}{\sqrt{2\phi''(c)(\phi(\kappa) - \phi(c))}} \right] \right| d\kappa \leq \left[\alpha_2 - \frac{(b-a)|f(c)|}{\varepsilon^3} \frac{M_{\phi'} + 4(b-a)^{-1}}{M_{\varepsilon, \phi''}} \right] \frac{1}{M_{\varepsilon, \phi''}}$$

Pour estimer J_2 il nous reste à évaluer l'intégrale sur $[a, c - \varepsilon] \cup [c + \varepsilon, b]$. Remarquons d'abord que sur cet intervalle :

$$\left| \frac{d}{dk} \frac{f(k)}{\phi'(k)} \right| \leq \frac{M_{f'}}{\omega_{\varepsilon, \phi'}} + \frac{M_f \cdot M_{\phi''}}{(\omega_{\varepsilon, \phi'})^2}$$

$$\left| \frac{d}{dk} \frac{f(c) \sinh(k-c)}{\sqrt{2\phi''(c)(\phi(k)-\phi(c))}} \right| = \frac{|f(c)|}{\sqrt{2\phi''(c)}} \frac{|\phi'(k)|}{(\phi(k)-\phi(c))^{3/2}}$$

Mais $k \leq c \mp \varepsilon \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \phi(k) - \phi(c) &\geq \phi(c \mp \varepsilon) - \phi(c) \geq \frac{1}{2} \inf_{c-\varepsilon \leq \xi \leq c+\varepsilon} \phi''(\xi) \cdot (c \mp \varepsilon - c)^2 = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2} \omega_{\varepsilon, \phi''} \end{aligned}$$

On obtient comme majoration pour la dernière expression

$$\frac{|f(c)|}{2^{3/2} \sqrt{\phi''(c)}} \frac{M_{\phi'}}{2^{-3/2} \varepsilon^3 (\omega_{\varepsilon, \phi''})^{3/2}} \leq \frac{|f(c)| \cdot M_{\phi'}}{\varepsilon^3 (\omega_{\varepsilon, \phi''})^2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\left(\int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b \right) \left| \frac{d}{dk} \left[\frac{f(k)}{\phi'(k)} - \frac{f(c) \sinh(k-c)}{\sqrt{2\phi''(c)(\phi(k)-\phi(c))}} \right] \right| dk \leq \\ &\leq (b-a) \left(\frac{M_{f'}}{\omega_{\varepsilon, \phi'}} + \frac{M_f M_{\phi''}}{(\omega_{\varepsilon, \phi'})^2} \right) + (b-a) \frac{|f(c)| M_{\phi'}}{\varepsilon^3 (\omega_{\varepsilon, \phi''})^2} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \frac{\alpha_2}{\omega_{\varepsilon, \phi''}} - \frac{(b-a) |f(c)| (M_{\phi'} + 4(b-a)^{-1})}{\varepsilon^3 (\omega_{\varepsilon, \phi''})^2} + \frac{\alpha_1}{\omega_{\varepsilon, \phi'}} + \frac{(b-a) |f(c)| M_{\phi'}}{\varepsilon^3 (\omega_{\varepsilon, \phi''})^2} = \\ &= \frac{\alpha_1}{\omega_{\varepsilon, \phi'}} + \frac{\alpha_2}{\omega_{\varepsilon, \phi''}} - \frac{4 |f(c)|}{\varepsilon^3 (\omega_{\varepsilon, \phi''})^2} \end{aligned}$$

Estimation de J_3 et J_4

$$|J_3 + J_4| \leq \frac{|f(c)|}{\sqrt{8\phi''(c)}} \left[\frac{1}{(\phi(b) - \phi(c))^{3/2}} + \frac{1}{(\phi(a) - \phi(c))^{3/2}} + \frac{3}{2} \left(\int_{\phi(a) - \phi(c)}^{\infty} + \int_{\phi(b) - \phi(c)}^{\infty} \right) \frac{dt}{t^{3/2}} \right]$$

$$= \frac{|f(c)|}{\sqrt{8\phi''(c)}} 2 \left[\frac{1}{(\phi(b) - \phi(c))^{3/2}} + \frac{1}{(\phi(a) - \phi(c))^{3/2}} \right]$$

Comme dans ce qui précède il suit que :

$$\begin{aligned} \phi(b) - \phi(c) &\geq \phi(c + \varepsilon) - \phi(c) \geq \frac{1}{2} \inf_{c \leq \eta \leq c + \varepsilon} \phi''(\eta) (c + \varepsilon - c)^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{2} m_{\varepsilon, \phi''} \cdot \varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\phi(a) - \phi(c) \geq \frac{1}{2} m_{\varepsilon, \phi''} \cdot \varepsilon^2$$

Donc :

$$|J_3 + J_4| \leq \frac{4|f(c)|}{\sqrt{\phi''(c)} (m_{\varepsilon, \phi''})^{3/2} \cdot \varepsilon^3} \leq \frac{4|f(c)|}{(m_{\varepsilon, \phi''})^2 \cdot \varepsilon^3}$$

Ainsi :

$$|J_2 + J_3 + J_4| \leq \frac{\alpha_1}{m_{\varepsilon, \phi'}} + \frac{\alpha_2}{m_{\varepsilon, \phi''}}$$

QED

ANNEXE 4

Nous donnerons dans cette annexe quelques formules (connues) qui permettent de passer des expressions obtenues pour les ondes partielles aux expressions en trois dimensions.

Soient S_2 la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$ munie de la mesure invariante habituelle $d\hat{x}$ (si $\hat{x} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ alors $d\hat{x} = \sin \theta d\theta d\varphi$) et $L^2(S_2)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur S_2 . Nous notons en général

$$\hat{x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \in S_2 \quad \text{si } 0 \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

Les harmoniques sphériques $Y_e^m : S_2 \rightarrow \mathbb{C}$ ($e = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, \pm 1, \dots; \pm e$) définies par :

$$Y_e^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2e+1}{4\pi} \frac{(e-m)!}{(e+m)!}} e^{im\varphi} P_e^m(\cos \theta)$$

(avec : $P_e(z) = \frac{1}{2^e e!} \frac{d^e}{dz^e} (z^2-1)^e$

$$P_e^m(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_e(z)$$

constituent une base orthonormée de $L^2(S_2)$. Si Ω est l'opérateur auto-adjoint engendré dans $L^2(S_2)$ par :

$$\Omega_0 = -\frac{1}{\sin^3 \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$$

alors :

$$\Omega Y_e^m = e(e+1) Y_e^m.$$

Si :

$$j_e(z) = \sqrt{\frac{e}{2z}} j_{e+\frac{1}{2}}(z)$$

alors :

$$\begin{aligned} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} &= 4\pi \sum_{e=0}^{\infty} \sum_{m=-e}^e i^e j_e(\kappa x) Y_e^{m*}(\hat{r}) Y_e^m(\hat{x}) \equiv \\ &\equiv \sum_{e=0}^{\infty} i^e j_e(\kappa x) (2e+1) P_e(\cos \theta) \end{aligned}$$

θ étant l'angle entre $\vec{K}$ et $\vec{x}$. (cf. Jahnke - Emde - Lösch (1) VIII. 6.2). Remarquons que la série précédente est absolument et uniformément convergente en $\vec{K}$, $\vec{x}$ lorsque $\vec{K}$, $\vec{x}$ parcourent des compacts (on utilise Jahnke - Emde - Lösch (1) VIII. 4. pour montrer que $|P_e(\cos \theta)| \leq \text{const} < \infty$ indépendamment de e , et la même référence IX. A.3.2 pour montrer que :

$$|j_e(z)| \leq \frac{1}{2 \cdot e!} \left(\frac{z}{2}\right)^e \quad \text{si } e \gg 0 \text{ et } z \gg 0.$$

Soit $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ muni de la mesure de Lebesgue dx . Si on définit :

$$f_0(x, \theta, \varphi) = x f(x \sin \theta \cos \varphi, x \sin \theta \sin \varphi, x \cos \theta)$$

(ou : $f_0(x, \hat{x}) = f(\vec{x})$) alors $f \mapsto f_0$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^3)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+) \otimes L^2(S_2)$ qui transforme l'opérateur $H = -\frac{\Delta}{2\mu} + V(x)$ (Δ est le laplacien dans $\mathbb{R}^3$, $\mu \in (0, \infty)$ et $V(x)$ est l'opérateur de multiplication par une fonction radiale $V(x)$) dans

$$\left(-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) \otimes \mathbb{I} + \frac{1}{2\mu x^2} \otimes \Omega$$

(on laisse de côté les questions de domaines).

Nous allons toujours identifier $L^2(\mathbb{R}^3) \equiv L^2(\mathbb{R}_+) \otimes L^2(S_2)$ par l'application $f \mapsto f_0$

D'autre part, si $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ est continue, alors $\forall x \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale :

$$f_{em}(x) = x \int_{S_2} Y_l^{m*}(\hat{x}) f(\vec{x}) d\hat{x}$$

converge absolument, $f_{em} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ et :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \|f_{em}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2$$

(Démonstration:

Si $L < \infty$, alors:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^L \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_0^{\infty} |f_{\ell m}(x)|^2 dx &\leq \int_0^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |f_{\ell m}(x)|^2 dx = \\ &= \int_0^{\infty} x^2 \int_{S_2} |f(\vec{x})|^2 d\hat{x} dx = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 < \infty \end{aligned}$$

On utilise S. Lang (1) (corollaire 5 page 251) pour obtenir l'égalité

QED)

Donc :

$$f \longmapsto \{f_{\ell m}\}_{\substack{\ell=0,1,2,\dots \\ m=0,\pm 1,\dots,\pm \ell}}$$

se prolonge en une isométrie $U : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-\ell}^{\ell} L^2(\mathbb{R}_+)$;
en fait, U est unitaire, car son inverse est l'extension de l'application $\{f_{\ell m}\} \mapsto f$ donnée par :

$$f(\vec{x}) \equiv (U^{-1} \{f_{\ell m}\})(\vec{x}) = \frac{1}{x} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell m}(x) Y_{\ell}^m(\hat{x})$$

(cette formule a un sens, par exemple, si les $f_{\ell m}$ sont continues et nulles en dehors d'un nombre fini de ℓ, m).

Nous allons identifier $L^2(\mathbb{R}^3)$ avec $\bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-\ell}^{\ell} L^2(\mathbb{R}_+)$ à l'aide de U .
Si H a la même forme ^{que} plus haut :

$$U H U^{-1} = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-\ell}^{\ell} \left(-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{2\mu x^2} + V(x) \right)$$

(moduler des questions de domaines).

Réciproquement, cette formule permet de définir l'opérateur H si on a pour chaque ℓ, m un opérateur $H_{\ell m}$ auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R}_+)$

par définition H sera la fermeture de la somme algébrique $U^{-1} \left(\bigoplus_{\ell} \bigoplus_m H_{\ell m} \right) U$; en particulier H sera autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Convenons d'attacher un indice ℓ à toutes les quantités dépendantes de ℓ introduites aux paragraphes 4 - 7 (donc H_{ℓ} , $\tilde{H}_{\ell}$, $\tilde{\Psi}_{\ell}$, etc.)

On pose : $\tilde{H} = U^{-1} \left(\bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-\ell}^{\ell} \tilde{H}_{\ell} \right) U$

$\tilde{H}$ est donc un opérateur auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R}^3)$; on définit H de la même manière.

Remarque : ne pas confondre l'indice de sommation m avec la masse m ,

Soit $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ la transformée de Fourier

$$(\mathcal{F}f)(\vec{x}) = \hat{f}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\vec{\kappa}\vec{x}} f(\vec{x}) d^3x$$

(ne pas confondre ce $\mathcal{F}$ avec celui qui a été utilisé aux paragraphes 4 - 7 et qui sera noté $\mathcal{F}_{\ell}$ d'après nos conventions).

Lemme

$$\mathcal{F} = U^{-1} \left(\bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-\ell}^{\ell} (-i)^{\ell} \mathcal{F}_{\ell} \right) U$$

Démonstration

Nous avons $\tilde{\Psi}_{\ell}(x, \kappa) = \sqrt{\kappa x} j_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \kappa x j_{\ell}(\kappa x)$

donc : $e^{i\vec{\kappa}\vec{x}} = (2\pi)^{3/2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{i^{\ell}}{\kappa x} \tilde{\Psi}_{\ell}(x, \kappa) Y_{\ell}^{m*}(\hat{\kappa}) Y_{\ell}^m(\hat{x})$

Il suffit de montrer que :

$$\mathcal{F} \bar{u}' \{f_{em}\} = \bar{u}' \{(-i)^e \overset{\circ}{\mathcal{F}}_e f_{em}\}$$

pour les $\{f_{em}\}$ tels que f_{em} soient continues, à support compact dans $(0, \infty)$ et nulles en dehors d'un nombre fini de l, m .

Alors :

$$\begin{aligned} (\bar{u}' \{(-i)^e \overset{\circ}{\mathcal{F}}_e f_{em}\})(\vec{\kappa}) &= \frac{1}{\kappa} \sum_e \sum_m (-i)^e (\overset{\circ}{\mathcal{F}}_e f_{em})(\kappa) Y_e^m(\hat{\kappa}) = \\ &= \int_0^\infty dx \frac{1}{\kappa} \sum_e \sum_m (-i)^e \overset{\circ}{\Psi}_e(x, \kappa) f_{em}(x) Y_e^m(\hat{\kappa}) = \\ &= \int_0^\infty x dx \sum_e \sum_m (-i)^e \frac{1}{\kappa x} \overset{\circ}{\Psi}_e(x, \kappa) \cdot x \int_{S_2} Y_e^{m*}(\hat{x}) f(\vec{x}) d\hat{x} Y_e^m(\hat{\kappa}) = \\ &= \int_0^\infty x^2 dx \int_{S_2} d\hat{x} \sum_e \sum_m (-i)^e \frac{1}{\kappa x} \overset{\circ}{\Psi}_e(x, \kappa) Y_e^m(\hat{\kappa}) Y_e^{m*}(\hat{x}) f(\vec{x}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\vec{\kappa} \cdot \vec{x}} f(\vec{x}) d^3x = (\mathcal{F} \bar{u}' \{f_{em}\})(\vec{\kappa}) \end{aligned}$$

QED

Corollaire 1

$\overset{\circ}{H}$ coïncide avec l'extension auto-adjointe habituelle de $-\frac{\Delta}{2m}$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$

Corollaire 2

$$(\mathcal{F} f)_{em} = (-i)^e \overset{\circ}{\mathcal{F}}_e f_{em}$$

Démonstration

$$u \mathcal{F} f = \{(\mathcal{F} f)_{em}\} = \left(\bigoplus_e \bigoplus_m (-i)^e \overset{\circ}{\mathcal{F}}_e \right) u f = \{(-i)^e \overset{\circ}{\mathcal{F}}_e f_{em}\}$$

QED

REFERENCES

- Alfaro, V. de - Regge, T. (1) "Potential scattering"
(J. Wiley & Sons 1965)
- Alsholm, P.K. (1) "Wave operators for long range scattering" (preprint).
- Amrein, W.O. - Martin, Ph.A. - Misra, B. (1)
"On the asymptotic condition of scattering theory",
(Helv. Phys. Acta 43 (4) p. 313 - 344 (1970)).
- Buslaev, V.S. - Matveev, V.B. (1)
"Wave operators for the Schrödinger equation with slowly
decreasing potential" (Teoret. i. mat. Phys. 2 367 (1970)).
- Dinculeanu, N. (1) "Vectorial measures" (Pergamon-Press).
- Dieudonné, J. (1) "Fondements de l'analyse moderne" I
(Gauthier - Villars 1965)
(2) "Calcul infinitésimal" (Hermann - 1968).
- Dollard, J.D. (1) "Thesis" (Princeton University 1963).
- Dunford - Schwartz (1) "Linear operators" I (J. Wiley & Sons 1958)
(2) "Linear operators" II (J. Wiley & Sons 1964).
- Foias, C. (1) "Décompositions intégrales des familles spectrales"
(Acta Sci. Math. XX 2-3 (Sage 1959))
- Green, T.A. - Lanford, O.E. (1)
"Rigorous derivation of the phase shift formula"
(J. Math. Phys. 1 no 2 (1960) 139).
- Jahnke - Emde - Lösch (1) "Tables of higher functions"
(seventh edition (1966)).
- Kac, I.S. (1) "On the existence of spectral functions"
(Am. Math. Soc. Transl. Ser 2 vol. 62).
- Kato, T. (1) "Perturbation theory for linear operators"
(Springer 1966).

Kodaira, K. (1)

"The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order" (Amer. Journal of Math. 71 (1949)).

Kuroda, S.T. (1) "On a paper of Green and Lanford"

(Journal Math. Phys. 3 no 3 p. 933).

Landau, E. - Lifchitz, E. (1) "Mécanique" (ed. Mir 1966).

Lang, S. (1) "Analysis II" (Addison-Wesley 1969).

Marchesin, D. - O'Carroll, M.L. (1)

"Time-dependent and time-independent potential scattering for asymptotically Coulomb potentials"

(Journal Math. Phys. 13 no 7 (1972) 982).

Maslov, V.P. (1) "Theorie des perturbations et méthodes asymptotiques" (Dunod 1972).

Matveev, V.B. - Skriganov, M.M. (1) (Teor. Mat. Fyz. 10 238).

Mulherin, D. - Zinnes J.J. (1) "Coulomb scattering I" (1972)

(Journal Math. Phys. 11 (1402)).

Naimark, M.A. (1) "Linear différential operators II"

(Harrap, London (1968)).

Prugovecki, E. - Zorbas, J. (1)

"Modified Lippmann - Schwinger equations for two-body scattering theory with long-range interactions"

(preprint - University of Toronto).

Saks, S. (1) "Theory of the integral".

Schwartz, L. (1) "Theory des distributions" (Hermann 1966).

Simon, B. (1) "Quantum mechanics for hamiltonians defined as quadratique forms" (Princeton University Press 1971).

Stone, M.H. (1) "Linear transformations in Hilbert space"

(Amer. Math. Soc.; sixth printing (1964)).

Weidmann, J. (1) "Zur Spektraltheorie von Sturm - Liouville - Operatoren" (Math. Zeit. 98 (1967) 268-302).

Wintner, A. (1) "Asymptotic integration of the adiabatic oscillator"

(Amer. Journal Math. 69 (1947) 251).

